Calcul Intégral (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen de la seconde session, durée : 2 heures
Les notes de cours ne sont pas autorisées
Les téléphones portables doivent être éteints
Une rédaction succincte et propre donnera jusqu'à deux points de bonus

Exercice 1. (3 points)

(a) Soit $\mathbb{R}$ la droite réelle muni de la tribu borélienne. Donner la définition d'une application borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \text{ est rationnel,} \\ x & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

est borélienne.

Exercice 2. (5 points)

(a) Énoncer le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée.

(b) Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 - \tfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

Exercice 3. (6 points) Soit $X = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne. Étant donnée une mesure μ sur X, on note $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ l'espace des fonctions boréliennes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu < \infty.$$

(a) Soit μ une mesure sur X telle que $\mu(X) < \infty$. Montrer que $\mathcal{L}^q(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mu)$ pour $1 \le p \le q \le \infty$.

(b) Construire un exemple d'une mesure σ-finie μ sur X et d'une fonction borélienne $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$, mais $f \notin \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Exercice 4. (6 points)

(a) Énoncer le théorème de Fubini.

(b) On note $X = \mathbb{R}^2$ muni de la tribu borélienne. Soit μ le produit tensoriel de la mesure de Lebesgue λ avec la mesure $2\delta_1$, où δ_a désigne la masse de Dirac au point $a \in \mathbb{R}$: $\mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \lambda(\mathrm{d}x) \otimes (2\delta_1(\mathrm{d}y))$. Calculer l'intégrale

$$\int_X \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \mathrm{d}\mu.$$