Calcul Intégral (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 20 décembre 2013, durée : 3 heures [1]

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Les téléphones portables doivent être éteints

Une rédaction succincte et propre donnera jusqu'à deux points de bonus

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–10, donner la réponse (*vrai* ou *faux*) sans aucune justification. Chaque bonne réponse donnera 0,5 point.

1. Toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.
2. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Alors $\lambda([a, b[) = b - a$ pour tous $a < b$.
3. Soit $f_n(x) = x^{-2}|\cos(x/n) - 1|$. Alors $\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ quand $n \to \infty$.
4. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions boréliennes positives sur l'intervalle $[0, 1]$. Supposons que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Alors $\int_0^1 f\mathrm{d}x \le \liminf\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\mathrm{d}x$.
5. Soit μ une mesure sur $[0, 1]$ absolument continue par report à la mesure de Lebesgue. Alors $\mu(\Gamma) = 0$ pour tout ensemble dénombrable $\Gamma \subset [0, 1]$.
6. Une fonction borélienne sur $[0, 1]$ est continue presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue.
7. Soit δ_a la masse de Dirac au point $a \in \mathbb{R}$. Alors δ_0 est absolument continue par rapport à δ_1.
8. Soit μ une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction μ-intégrable. Alors il existe une suite $x_n \to \infty$ telle que $f(x_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.
9. Pour toute mesure μ sur $\mathbb{R}^2$ il existe deux mesures μ_1, μ_2 sur $\mathbb{R}$ telles que $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.
10. La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est la tribu minimale contenant les ensembles dénombrables.

Questions de cours. **(a) (3 points)** Soit $X = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $\{g_n\}$ une suite de fonctions intégrables telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |g_n(x)|\lambda(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Montrer que la série $\sum_n g_n(x)$ converge pour λ-presque tout $x \in X$ et que sa somme est une fonction intégrable.

[1] *La note de l'examen* NE *est calculée par la formule* $\mathrm{NE} = \min(N1, 10) + N2$*, où* $N1$ *et* $N2$ *sont les notes pour les parties I et II.*

(b) **(1 point)** Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble fermé borné inclut dans la demi-droite ouverte $]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $K \subset [n^{-1}, n]$.

(c) **(2 points)** Soit $X = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et d'une mesure μ. Montrer que si $h : X \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne positive égale à zéro presque partout par rapport à μ, alors $\int_X h \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Questions de TD. **(4 points)** Soit $f(x, y) = xe^{-x^2(1+y^2)}$. En intégrant la fonction f sur $\mathbb{R}_+^2$, montrer que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Deuxième partie

Exercice 1. **(5 points)** Soit $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction appartenant à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \lambda)$.

(a) Rappeler la formule de Hölder ainsi que ses hypothèses.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in \mathcal{L}^1([0, x], \lambda)$.

(c) En utilisant la formule de Hölder montrer que :

$$\left(\int_{[0,x]} |f(t)| \, \mathrm{d}t \right)^2 \leq 2\sqrt{x} \int_{[0,x]} \sqrt{t} \, |f(t)|^2 \mathrm{d}t \, .$$

(d) En déduire que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{x} \int_{[0,x]} |f(t)| \mathrm{d}t$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \lambda)$. *Indication:* On pourra appliquer le théorème de Fubini.

Exercice 2. **(5 points)** Soit λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$ et f une fonction continue positive sur $[0, 1]$. On définit

$$g(x) = \int_0^1 \sqrt{f(t) + x^2} \, \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad h = \mathbf{1}_{\{f=0\}},$$

où $\mathbf{1}_\Gamma$ désigne la fonction indicatrice de Γ et $\{f = 0\} = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = 0\}$.

(a) Montrer que g est une fonction paire dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \int_0^1 h \, \mathrm{d}\lambda$.

(c) Montrer que si f est strictement positive λ-presque partout sur $[0, 1]$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que si $\lambda(\{x \in [0, 1] \mid f(x) = 0\}) > 0$, alors g n'est pas dérivable au point $x = 0$.

(e) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = \int_0^1 h \, \mathrm{d}\lambda$, et en déduire que si g est dérivable, alors elle de classe C^1.