Calcul Intégral (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 21 décembre 2012, durée : 3 heures[1]

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Les téléphones portables doivent être éteintes

Une rédaction succincte et propre donnera jusqu'à deux points de bonus

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–10, donner la réponse sans justification. Chaque bonne réponse donnera 0,5 point.

1. La tribu borélienne sur $[0,1]$ ne contient que des ensembles ouverts et des ensembles fermés.

   Vrai *Faux*

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, alors $f^{-1}(\Gamma)$ est borélien pour tout ensemble borélien $\Gamma \subset \mathbb{R}$.

   Vrai *Faux*

3. Toute fonction borélienne est continue.

   Vrai *Faux*

4. Toute fonction croissante est borélienne.

   Vrai *Faux*

5. Soit $X = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Alors toute fonction borélienne est intégrable.

   Vrai *Faux*

6. Soit $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ une suite de fonctions continues vérifiant l'inégalité $|f_n(x)| \le (1+x^2)^{-1}$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \ge 1$. Alors la suite

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\sup_{k \le n} f_k(x) \Big)\, dx$$

   converge vers une limite finie.

   Vrai *Faux*

7. Soit $X = \mathbb{R}$ avec la tribu borélienne. Alors la masse de Dirac concentrée au point $x = 0$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

   Vrai *Faux*

8. Soient μ et ν deux mesures sur l'espace $X = [0,1]$ muni de la tribu borélienne. Alors μ est absolument continu par rapport à $\mu + \nu$.

   Vrai *Faux*

[1] *La note finale est calculée par la formule* Note finale $= \min(N1, 10) + N2$*, où $N1$ et $N2$ sont les notes pour les parties I et II.*

9. Soit $X = \mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue λ. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = |x|^\alpha$ appartient à l'espace $\mathcal{L}^2(X, \lambda)$.

Vrai *Faux*

10. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures définies sur l'espace $X = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et μ leur produit tensoriel. Alors $\mu(X \times X) = \mu_1(X)\mu_2(X)$.

Vrai *Faux*

Questions de cours. **(a) (1 point)** Montrer que pour tout $\delta > 0$ il existe $C_\delta > 0$ tel que $|\ln x| \leq x^{-\delta} + C_\delta$ pour $0 < x \leq 1$.

(b) (1 point) Donner une démonstration de l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^3}{3} + \frac{2b^{3/2}}{3} \quad \text{pour tous} \quad a, b > 0.$$

(c) (1 point) Donner la définition de la tribu borélienne sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(d) (2 points) Enoncer le théorème de Radon–Nikodym (y compris la définition des notions principales qui figurent dans ce résultat).

Questions de TD. (5 points) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Calculer, en le justifiant, la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} \frac{1 + nx}{(1 + x)^n} \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Deuxième partie

Exercice 1. (5 points) Soit $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction appartenant à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \lambda)$.

(a) Rappeler la formule de Hölder ainsi que ses hypothèses.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in \mathcal{L}^1([0, x], \lambda)$.

(c) En utilisant la formule de Hölder montrer que :

$$\left(\int_{[0,x]} |f(t)| \, \mathrm{d}t \right)^2 \leq 2\sqrt{x} \int_{[0,x]} \sqrt{t} \, |f(t)|^2 \mathrm{d}t \, .$$

(d) En déduire que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{x} \int_{[0,x]} |f(t)| \mathrm{d}t$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \lambda)$. *Indication:* On pourra appliquer le théorème de Fubini.

Exercice 2. (5 points) Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} \sin(2y)}{y} \, dy = \arctan 2.$$

Indication: En utilisant la relation $\sin a = \frac{1}{2i}(e^{ia} - e^{-ia})$ et un théorème du cours, intégrer la fonction $f(x, y) = e^{-xy} \sin(2y)$ sur le domaine $[1, +\infty[\times [0, +\infty[$. Tous les calculs doivent être justifiés.