Calcul Intégral (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 12 décembre 2011, durée : 3 heures
Les notes de cours ne sont pas autorisées[1]

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–10, donner la réponse sans justification. Chaque bonne réponse vaut 0,5 point.

1. La tribu borélienne sur $[0,1]$ est la tribu minimale contenant les ensembles $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$.

   Vrai *Faux*

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Alors f est représentable sous la forme $f = f^+ - f^-$, où f^+ et f^- sont des fonctions continues positives.

   Vrai *Faux*

3. Toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est borélienne.

   Vrai *Faux*

4. Soit μ une mesure sur $X = [0,1]$ de masse totale finie. Alors $\mu(\Gamma) < \infty$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_X$.

   Vrai *Faux*

5. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout intervalle $]a,b[$ on a $\lambda(]a,b[) = b - a$.

   Vrai *Faux*

6. Soit $X = [0,1]$ avec la tribu borélienne. Il existe une mesure μ sur X telle que la mesure 2μ n'est pas absolument continue par rapport à μ.

   Vrai *Faux*

7. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $f(x) = |x|^{-1}e^{-x}$ appartient à l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \lambda)$.

   Vrai *Faux*

8. Soit $X = [0,1]$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue λ. Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables telle que $|f_n(x)| \le C/\sqrt{nx}$ pour $n \ge 1000$ et $x \in]0,1]$. Alors $\int_X f_n d\lambda \to 0$ quand $n \to \infty$.

   Vrai *Faux*

9. Soit μ_1, μ_2 des mesures sur $X = [0,1]$ de masse totale finie et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Alors $\mu(X \times X) < \infty$.

   Vrai *Faux*

[1] *La note finale est calculée par la formule* Note finale $= \min(N1, 10) + N2$*, où* $N1$ *et* $N2$ *sont les notes pour les parties I et II.*

10. Soit μ une mesure absolument continue par rapport à la mesure ν. Pour tout ensemble borélien Γ, si $\mu(\Gamma) > 0$, alors $\nu(\Gamma) > 0$.

Vrai *Faux*

Questions de cours. **(a)** **(1 point)** Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres réels telle que $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ et $a_n \to a$ quand $n \to \infty$. Montrer que $a_n \leq a$ pour tout $n \geq 1$.

(b) **(1 point)** Soit $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ deux suites telles que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$ et $a_n \to a$ quand $n \to \infty$. Montrer que $\liminf_{n\to\infty} b_n \geq a$.

(c) **(1 point)** Donner la définition de la tribu borélienne sur $[0, 1]$.

(d) **(1 point)** Enoncer le lemme de Fatou.

(e) **(1 point)** Enoncer le théorème de Radon–Nikodym.

Questions de TD. **(a)** **(2 points)** Montrer que l'intégrale

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$$

définit une fonction continue et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) **(2 points)** Prouver que f satisfait l'équation différentielle $2y' + xy = 0$. Résoudre cette équation.

(b) **(1 point)** Sachant que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

Deuxième partie

Exercice 1. **(a)** **(1 point)** Prouver que l'intégrale $I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\, dx$ est finie pour tout entier $n \geq 1$.

(b) **(1 point)** Montrer que $I_n \geq I_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

(c) **(2 points)** Trouver la limite de la suite $\{I_n\}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit λ la mesure de Lebesgue et $\mu = \delta_1 + 2\delta_2$. On note $\nu = \lambda \otimes \mu$ et

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

(a) **(2 points)** Le théorème de Fubini, est-il applicable à la fonction f et la mesure ν. (Justifier la réponse.)

(b) **(4 points)** Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\nu(x, y).$$

Corrigé de l'examen pour le cours *Calcul intégral*

Questions. 1. Faux, 2. Faux, 3. Vrai, 4. Vrai, 5. Vrai, 6. Faux 7. Faux, 8. Vrai, 9. Vrai, 10. Vrai. □

Questions de cours. **(a)** Supposons qu'il existe $m \geq 1$ tel que $a_m > a$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}(a_m - a) > 0$. Alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $|a_n - a| < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$, d'où on voit que $a_n \leq a + \varepsilon < a_m$ pour $n \geq n_0$. D'autre part, $a_n \geq a_m$ pour $n \geq m$. La contradiction obtenue montre que $a_n \leq a$ pour tout $n \geq 1$.

(b) Supposons que $\liminf_n b_n < a$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ une suite $n_k \to \infty$ telle que $b_{n_k} \leq a - \varepsilon$. Il s'ensuit que $a_{n_k} \leq a - \varepsilon$. En passant à la limite, on obtient $a \leq a - \varepsilon$. La contradiction obtenue montre que $\liminf_n b_n \geq a$

(c) Soit $X = [a, b]$ un intervalle. La tribu borélienne sur X est définie comme la tribu minimale contenant tous les ensembles de la forme $X \cap]\alpha, \beta[$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(d) Soit μ une mesure sur un intervalle $X = [a, b]$ muni de la tribu borélienne. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions sur X qui sont positives et boréliennes. Alors

$$\int_X \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

(e) Soit μ et ν deux mesures σ-finies sur in intervalle X muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}_X$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- μ est absolument continue par rapport à ν; c'est-à-dire, pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_X$, la relation $\nu(\Gamma) = 0$ implique que $\mu(\Gamma) = 0$.
- il existe une fonction $h \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$ telle que pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_X$ on a

$$\mu(\Gamma) = \int_X I_\Gamma h \, d\nu.$$

□

Questions de TD. **(a)** On a les majorations suivantes :

$$|e^{-t^2} \cos(xt)| \leq e^{-t^2}, \quad \Big|\frac{\partial}{\partial x} e^{-t^2} \cos(xt)\Big| \leq t e^{-t^2}.$$

Comme les membres de droites dans ces inégalités sont des fonctions intégrables, la continuité et dérivabilité de f sont conséquences des résultats généraux établis dans le cours.

(b) En dérivant sous l'intégrale et intégrant par parties, on obtient

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t \sin(xt)\, dt = -\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt,$$

d'où on voit que f vérifies l'équation $2y' + xy = 0$. Sa solution générale est donnée par la formule $y(x) = C \exp(-x^4/2)$.

(c) Comme $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on a $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où on conclut que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$. □

Exercice 1. **(a)** Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left|\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right| \leq \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 1, \\ x^{-1/2}, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \tag{1}$$

d'où on voit que $I_n < \infty$ pour tout $n \geq 1$.

(b) Comme $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$, la monotonie de l'intégrale implique que $I_{n+1} \leq I_n$.

(c) Pour $x > 0$, on a $\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \to 0$ quand $n \to \infty$. L'inégalité (1) montre qu'on peut applique le théorème de Lebesgue, donc $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. □

Exercice 2. **(a)** Comme

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, d\lambda(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{x^2+1} d\lambda(x) = \pi|y|,$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, d\lambda(x) \right) d\mu(y) = 5\pi < \infty.$$

Donc, le théorème de Fubini est applicable.

(b) En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) d\nu(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{4}{x^2+5} \right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

□