Calcul Intégral (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 13 décembre 2010, durée : 3 heures
Les notes de cours ne sont pas autorisées[1]

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–10, donner la réponse sans justification. Chaque bonne réponse vaut 0,5 point.

1. La tribu borélienne sur $[0,1]$ contient l'ensemble $A = \{\frac{1}{n^2}, n \geq 1\} \cup \{0\}$.

   Vrai *Faux*

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f = f_1 + f_2$, où f_1 est continue et f_2 est borélienne. Alors f est borélienne.

   Vrai *Faux*

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors l'ensemble suivant est borélien : $\{x \in [0,1] : f(x) \neq n^{-2} \text{ pour tout entier } n \geq 1\}$.

   Vrai *Faux*

4. Une mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\Gamma) = 0$ pour tout ensemble ouvert borné $\Gamma \subset \mathbb{R}$.

   Vrai *Faux*

5. Toute mesure μ sur $X = [0,1]$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ vérifie l'inégalité $\mu(\Gamma) \leq 2\lambda(\Gamma)$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_X$.

   Vrai *Faux*

6. Soit $X = [0,1]$ avec la tribu borélienne et la mesure $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{x_k}$, où $\{x_k\}$ est une suite dense dans $[0,1]$. Alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

   Vrai *Faux*

7. Soit $X = [1, +\infty)$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue λ. La fonction $f(x) = x^{-1}e^{-1/x}$ appartient à l'espace $\mathcal{L}^2(X, \lambda)$.

   Vrai *Faux*

8. Soit $X = \mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue λ. Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions intégrables qui converge uniformément vers 0. Alors $\int_X f_n d\lambda \to 0$ quand $n \to \infty$.

   Vrai *Faux*

9. Soit μ_i, $i = 1, 2$ deux mesures sur $X = [0,1]$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Alors il existe $\Gamma_i \in \mathcal{B}_{X_i}$, $i = 1, 2$, tel que $\mu(\Gamma_1 \times \Gamma_2) < 2\mu_1(\Gamma_1)\mu_2(\Gamma_2)$.

   Vrai *Faux*

[1] *La note finale est calculée par la formule* Note finale $= \min(N1, 10) + N2$*, où* $N1$ *et* $N2$ *sont les notes pour les parties I et II.*

10. Toute fonction différentiable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue.

Vrai *Faux*

Questions de cours. **(a)** **(1 point)** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels vérifiant l'inégalité $a < b + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $a \leq b$.

(b) **(1 point)** Soit $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ et $a_n \to a$ quand $n \to \infty$. Montrer que $a_n \leq a$ pour tout $n \geq 1$.

(c) **(1 point)** Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par la formule $f_n(x) = 0$ pour $x \geq 1/n$ et $f_n(x) = 1 - nx$ pour $x \leq 1/n$. Montrer que la suite $\{f_n\}$ converge point par point, mais ne converge pas uniformément.

(d) **(2 points)** Pour une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}$, on note $f^{-1}(\Gamma) = \{x \in [0,1] : f(x) \in \Gamma\}$. Montrer que si l'ensemble $f^{-1}([a,b])$ est borélien pour tous $a \leq b$, alors $f^{-1}(\Gamma)$ est borélien pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Questions de TD. **(a)** **(2 points)** Soit $X = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. La mesure $\mu = 3\lambda$ est-elle absolument continue par rapport à λ? Si oui, préciser la densité correspondante.

(b) **(3 points)** Soit $X = \mathbb{R}_+$ muni de la tribu borélienne et d'une mesure μ telle que $\mu(X) < \infty$. Montrer que $\mathcal{L}^p(X,\mu) \subset \mathcal{L}^q(X,\mu)$ pour $1 \leq q \leq p$.

Deuxième partie

Exercice 1. **(2 points)** Soit $X = [a,b]$ muni de la tribu borélienne, μ une mesure sur X et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. Montrer que

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) \geq C\}\big) \to 0 \quad \text{quand } C \to +\infty.$$

Exercice 2. **(a)** **(1 point)** Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}\, x^{3/2}}$. Pour tout $x > 0$, calculer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) **(2 points)** Soit λ la mesure de Lebesgue sur $X = \mathbb{R}_+$. Montrer que la limite suivante existe et est un réel strictement positif :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x)|\, d\lambda.$$

(c) **(2 points)** Montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \in \mathcal{L}^1(X,\lambda)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$.

Exercice 3. **(3 points)** Soit $X = [0,1]$, $\nu = \delta_0 + \delta_1$, où δ_a désigne la masse de Dirac au point $a \in X$, et μ une mesure absolument continue par rapport à ν avec la densité $f(x) = x^2 + 1$. Calculer l'intégrale

$$\int_X \frac{x}{x^4+2}\, d\mu.$$