Calcul Intégral (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 17 décembre 2009, durée : 3 heures
Les notes de cours ne sont pas autorisées[1]

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–10, donner la réponse sans justification. Chaque bonne réponse vaut 0,5 point.

1. La tribu borélienne sur $[0,1]$ contient l'ensemble $A = \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}$.

   Vrai *Faux*

2. Toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut être représentée sous la forme $f = f^+ - f^-$, où $f^\pm$ sont des fonctions mesurables non négatives.

   Vrai *Faux*

3. Toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue.

   Vrai *Faux*

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors l'ensemble suivant est borélien : $\{x \in [0,1] : f(x) = n^{-2}$ pour un entier $n \geq 1\}$.

   Vrai *Faux*

5. Soit $X = [1, +\infty)$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue λ. La fonction $f(x) = x^{-1}$ appartient à l'espace $\mathcal{L}^2(X, \lambda)$.

   Vrai *Faux*

6. Soit $X = [0,1]$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue λ. Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions intégrables qui converge simplement vers une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{R}$. Alors $\int_X f_n d\lambda \to \int_X f d\lambda$ quand $n \to \infty$.

   Vrai *Faux*

7. Soit $X = [0,1]$ avec la tribu borélienne. Alors la masse de Dirac concentrée au point $\frac{1}{2}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

   Vrai *Faux*

8. Une mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\Gamma) = 0$ pour tout ensemble fermé borné $\Gamma \subset \mathbb{R}$.

   Vrai *Faux*

9. Toute mesure μ sur $X = [0,1]$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ vérifie l'inégalité $\mu(\Gamma) \leq c\lambda(\Gamma)$ avec une constante $c > 0$ qui ne dépend pas de $\Gamma \in \mathcal{B}_X$.

   Vrai *Faux*

[1] *La note finale est calculée par la formule* Note finale $= \min(N1, 10) + N2$*, où* $N1$ *et* $N2$ *sont les notes pour les parties I et II.*

10. Soit μ_i, $i = 1, 2$ deux mesures sur $X = [0,1]$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Alors il existe $\Gamma_i \in \mathcal{B}_{X_i}$, $i = 1, 2$, tel que $\mu(\Gamma_1 \times \Gamma_2) < \mu_1(\Gamma_1)\mu_2(\Gamma_2)$.

Vrai *Faux*

Questions de cours. Soit $X = [0,1]$.

(a) **(2 points)** Donner la définition d'une tribu sur X.

(b) **(1 point)** Donner la définition de la tribu borélienne sur X.

(c) **(2 points)** Enoncer le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée.

(d) **(1 point)** Enoncer l'inégalité de Minkowski.

Questions de TD. Pour les questions suivantes il faut donner des démonstrations complètes.

(a) **(2 points)** Soit $X = [0,1]$ muni de la tribu borélienne, μ une mesure sur X telle que $\mu(X) = 1$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble de fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive. Trouver la valeur minimum de la fonction $H : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(f) = \int_X f d\mu \cdot \int_X f^{-1} d\mu.$$

(b) **(2 points)** Soit $X = [a,b]$ muni de la tribu borélienne, μ une mesure sur X et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $C > 0$ on a

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) \geq C\}\big) \leq C^{-1} \int_X f \, d\mu.$$

Deuxième partie

Exercice 1. Soit $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = (1 - xy)^{-1}$ pour $0 \leq x, y < 1$. On admet le fait que $\iint_{[0,1]^2} f \, dxdy = \frac{\pi^2}{6}$.

(a) **(1 point)** Montrer que $f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$ pour $0 \leq x, y < 1$, où la série converge simplement.

(b) **(2 points)** En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Les passages à la limite doivent être justifiés.)

Exercice 2. On pose $I_n(x) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-tx} dt$ pour $x > 0$.

(a) **(2 points)** Calculer $I_1(x)$ et montrer que $I_n'(x) = -I_{n+1}(x)$. (On justifiera la dérivation sous l'intégrale.)

(b) **(2 points)** En déduire une formule explicite pour $I_n(x)$.

Exercice 3. **(a)** **(1 point)** Donner la définition d'une mesure σ-finie.

(b) **(2 points)** Enoncer et démontrer le théorème de Radon–Nikodym pour des mesures σ-finies. (On admet le cas de mesures finies.)