Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S5

Calcul Intégral - Vendredi 19 décembre 2008

Durée : 3h00 - Ni document ni calculatrice autorisés.

Les 4 exercices sont indépendants. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice I (5 pts)

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ mesure **finie**. On considère une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{T}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \int_A f d\mu \leq C\mu(A) \quad (*)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n = \{x \in X \,/\, f(x) \geq C + \frac{1}{n}\}.$$

1. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{\{\frac{1}{2}\}}$ sur $X = [0, 1]$ (muni de la mesure de Lebesgue) vérifie $(*)$ avec $C = 1$, et que pour cette fonction $A_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On revient au cas général. Montrer que $A_n \in \mathcal{T}$ et que $A_n \subset A_{n+1}$.
3. a) Montrer que
$$\int_{A_n} f d\mu \geq (C + \frac{1}{n})\mu(A_n) \ .$$
b) En utilisant la propriété $(*)$, en déduire que $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. a) Montrer que
$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \{x \in X \,/\, f(x) > C\}.$$
b) En déduire que $f \leq C$ μ p.p.

Exercice II (6 pts)

Pour $a \in [0, +\infty[$ et $x \in]0, +\infty[$, on note

$$f(x, a) = \frac{1 - e^{-ax}}{x} e^{-x} \quad \text{et} \quad F(a) = \int_0^{+\infty} f(x, a)\, dx \ .$$

1. a) Montrer que pour tout $a \geq 0$,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x, a) = a$$
b) Montrer que $F(a)$ est bien défini pour $a \geq 0$. Que vaut $F(0)$?
2. a) Montrer que pour tout $A > 0$, on a
$$\forall a \in [0, A], \quad 0 \leq f(x, a) \leq f(x, A) \text{ pour tout } x > 0.$$
b) Montrer que la fonction F est continue sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$. Est-elle continue sur $[0, +\infty[$?
3. Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que
$$\forall a \geq 0, \ F'(a) = \frac{1}{a + 1}.$$
En déduire une expression simple de $F(a)$.

4. Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq a < b$, on pose

$$G(a) = \int_0^1 \frac{1-t^a}{-\ln t}\,dt \quad \text{et} \quad J(a,b) = \int_0^1 \frac{t^b - t^a}{\ln t}\,dt.$$

Montrer que $G(a) = F(a)$ pour $a \geq 0$. Exprimer $J(a,b)$ à l'aide de G. En déduire que

$$J(a,b) = \ln \frac{b+1}{a+1} \ .$$

Exercice III (4 pts)

On note m la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

1) Que vaut $m(T)$?

2) On pose $f(x,y) = y - xy$. Montrer que $f \in L^1(T)$ et calculer

$$\int_T f\,dm.$$

3) Donner la définition de $||f||_{L^2(T)}$. Montrer que

$$||f||_{L^2(T)} \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Exercice IV (5 pts)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n(x) = g(x) \cdot \mathbf{1}_{[-n,n+1]}(x), \quad G_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} g(x+k) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(x+k) \ .$$

1) Montrer que les fonctions h_n sont boréliennes sur $\mathbb{R}$, forment une suite croissante, et que la limite de cette suite est g. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx \ .$$

2) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G_n(x)\,dx = \int_0^1 G(x)\,dx.$$

3) Etablir l'égalité

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 G_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx \ .$$

En déduire que

$$\int_0^1 G(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx \ .$$