Université de Cergy-Pontoise - Licence L3- S5

Calcul Intégral - Vendredi 11 janvier 2008

Durée: 3h00 - Ni document ni calculatrice autorisés.

Notations: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(I\!R)$ est la tribu borélienne de $I\!R$. On note 1_A la fonction indicatrice de l'ensemble A ($1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$).
Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice I (4 pts)
Pour tout $n \in I\!N^*$ et pour tout $x \geq 0$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + ... + x^n}$$

et on note

$$I_n = \int_0^n f_n \, dx.$$

1) Montrer que pour $0 \leq x \leq 1$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1 - x.$$

Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ pour $x > 1$?
2) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \geq 0$, on a

$$0 < f_n(x) \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

3) Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}$$

en justifiant soigneusement le passage à la limite.

Exercice II (10 pts)
Soit l'intervalle $I = [1, +\infty]$ et soit $f : I \mapsto I\!R$ une fonction mesurable. Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{(t + x)^2} dt$$

Dans les questions 1) à 4), on fait l'hypothèse que $f \in L^1(I)$.
1) Montrer que $F(x)$ est bien défini pour $x \geq 0$ et que la fonction F est continue sur $[0, +\infty]$.

2) a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty]$ et donner l'expression de $F'(x)$ pour tout $x \geq 0$.

b) Montrer que F est C^∞ sur $[0, +\infty]$.

3) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$|F(x)| \leq \frac{||f||_{L^1(I)}}{(x+1)^2}$$

4) Montrer que F est intégrable sur $[0, +\infty]$ et que

$$\int_0^{+\infty} F dx = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

5) On suppose à présent que $f \in L^p(I)$ avec $1 < p < +\infty$. On note q l'exposant conjugué de p.

a) Rappeler la définition de q et montrer que $1 < q < +\infty$.

b) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \geq 0$, on a

$$|F(x)| \leq \frac{||f||_{L^p(I)}}{(2q-1)(x+1)^{2q-1}}$$

6) Donner un exemple de fonction mesurable positive $f : I \mapsto \mathbb{R}_+$ pour laquelle pour tout $x \geq 0$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+x)^2} dt = +\infty$$

Exercice III (6 pts)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \mapsto (\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$ une fonction mesurable positive. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \{\frac{1}{n} \leq f \leq n\} \text{ et } f_n = f 1_{A_n}$$

1) Montrer que $A_n \in \mathcal{T}$, que

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu(f > 0)$$

et que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

2) On suppose à présent que $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu(A_n) \leq n(\int_\Omega f d\mu) < +\infty$$

et que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega \setminus A_n} f d\mu = 0.$$

b) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{T}$ tel que

$$\mu(A) < \infty, \ \sup_{x \in A} f(x) < +\infty \text{ et } \int_{\Omega \setminus A} f d\mu < \epsilon.$$