Université de Cergy-Pontoise - Licence de Mathématiques

Calcul Intégral - Mardi 19 juin 2007

Durée: 2h - Ni document ni calculatrice autorisés

Notation:
dx est la mesure de Lebesgue sur $I\!R$. On note 1_A la fonction indicatrice de l'ensemble A ($1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$).

Exercice I (7 pts)
Pour $n \in I\!N^*$, on pose

$$\forall x \in I\!R, \quad f_n(x) = \cos\left(\frac{x^3}{n}\right)\frac{1}{1+x^2}$$

1) a) Montrer qu'il existe une fontion f, que l'on précisera, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f, \quad \mu\text{-p.p. sur } I\!R$$

b)Calculer $\int_{I\!R} f\, dx$.
2) On pose

$$I_n = \int_{I\!R} f_n\, dx$$

Montrer que $I_n \in I\!R$ et que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \pi$, en justifiant soigneusement le résultat.

Exercice II (5 pts)
Pour quelles valeurs de $\alpha \in I\!R$ la fonction

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$? Dans ce cas, calculer la valeur de $\int_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[} f(x,y)\, dx\, dy$.

Exercice III (8 pts)
On considère une suite décroissante $(f_n)_{n\in I\!N}$ de fonctions mesurables positives de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(I\!R_+, \mathcal{B})$. On suppose de plus que $\int_\Omega f_0\, d\mu < +\infty$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = 0 \quad \mu\text{-p.p. sur } \Omega$$

1) Pour tout $n \in I\!N$, on pose $g_n = f_0 - f_n$. Justifier précisément le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega f_0 \, d\mu.$$

2) a) Montrer que pour tout $n \in I\!N$,

$$\int_\Omega f_n \, d\mu < +\infty$$

b) Déduire du résultat de la question 1) que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = 0$$

3) Dans cette question, on considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\in I\!N}$ définies par

$$\forall x \in I\!R, \quad h_n(x) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{x} 1_{[1,+\infty[}$$

a) Montrer que pour tout $n \in I\!N$, la fonction h_n est mesurable positive de $(I\!R, \mathcal{B})$ dans $(I\!R_+, \mathcal{B})$ et que la suite (h_n) est décroissante. Montrer également que

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = 0 \;\; \mu\text{-p.p. sur } I\!R$$

b)Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega h_n \, dx$. Comparer au résultat de la question 2)b).