Université de Cergy-Pontoise - Licence L3- S5

Calcul Intégral - Vendredi 22 décembre 2006

Durée: 3h00 - Ni document ni calculatrice autorisés.

Notations: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. On note 1_A la fonction indicatrice de l'ensemble A ($1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$).
Les 4 problèmes sont indépendants.

Exercice I (6 pts)
Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ mesure finie et soit $f : (E, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$ une fonction mesurable positive.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k 1_{\{k \leq f < k+1\}} + n 1_{\{f \geq n\}} \leq f$$

2) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu(k \leq f < k+1) = \mu(f \geq k) - \mu(f \geq k+1).$$

b) Montrer que

$$\int_E (\sum_{k=1}^{n-1} k 1_{\{k \leq f < k+1\}}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(f \geq k) \; - \; n\mu(f \geq n)$$

3) En déduire que si $\int_E f \, d\mu < +\infty$, la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(f \geq k)$$

est convergente.

Exercice II (4 pts)
Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$ une fonction borélienne positive ayant la propriété suivante:

$$\text{Il existe } A \in \mathcal{B} \text{ tel que } \lambda(A) > 0 \text{ et } \forall x \in A, \quad f(x) > 0$$

Pour $n \in I\!N^*$, on définit

$$B_n = \{x \in A \ /|x| \leq n \text{ et } f(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

1) Montrer que pour tout $n \in I\!N^*$, $B_n \in \mathcal{B}$ et que

$$\cup_{n \in I\!N^*} B_n = A$$

2) En déduire que $\lambda(B_n) > 0$ pour n assez grand, puis que

$$\int_{I\!R} f \, d\lambda > 0$$

Exercice III (5 pts) Pour $a \in I\!R$ et $n \in I\!N^*$, on pose

$$I_n(a) = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-ax} \, dx$$

1) Pour $n \in I\!N^*$, on pose

$$f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n e^{-ax} 1_{[0,n]}(x)$$

Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{(1-a)x} 1_{[0,+\infty[}(x)$$

2) a) Montrer que pour tout $u \geq 0$, $\ln(1+u) \leq u$

b) On suppose dans cette question que $a > 1$. Calculer la limite de $J_n(a)$, en justifiant soigneusement le résultat.

3) On suppose dans cette question que $a \leq 1$. A l'aide du lemme de Fatou, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} J_n(a) = +\infty$$

Exercice IV (5 pts)

Soit $f \in L^5([0,+\infty[)$. Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|F(x)| \leq Cx^{\frac{4}{5}}$$

2) Montrer en le justifiant soigneusement que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_n^{+\infty} |f|^5 \, dt = 0$$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geq n$, on a

$$|F(x) - F(n)| \leq x^{\frac{4}{5}} [\int_n^{+\infty} |f|^5 \, dt]^{\frac{1}{5}}$$

4) Déduire des questions 2) et 3) que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x^{\frac{4}{5}}} = 0$$