Université de Cergy-Pontoise - Licence de Mathématiques

Calcul Intégral - Lundi 3 juillet 2006

Durée: 2h00 - Ni document ni calculatrice autorisés

Notations:
dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note 1_A la fonction indicatrice de l'ensemble A ($1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$).

Exercice I (7 pts)
1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} \cos\left(\frac{x^3}{n}\right)\frac{1}{1+x^2}dx$$

Montrer que $I_n \in \mathbb{R}$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \pi,$$

en justifiant soigneusement le résultat.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} e^{-\frac{|x|}{k}}$$

a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < f_n(x) \leq C$.
b) Calculer la limite de $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$, en justifiant soigneusement la réponse (on rappelle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6})$$

Exercice II (7 pts)
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ mesure finie. On considère une fonction mesurable $f : X \mapsto \mathbb{R}$ telle qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \int_A f d\mu \geq C\mu(A) \quad (*)$$

Pour $n \in I\!N^*$, on définit

$$A_n = \{f \leq C - \frac{1}{n}\}$$

1) Montrer que $A_n \in \mathcal{T}$, que $A_n \subset A_{n+1}$ et que

$$\cup_{n \geq 1} A_n = \{f < C\}$$

2) En utilisant la propriété $(*)$, montrer que $\mu(A_n) = 0$.
3) En déduire que $f \geq C$ μ p.p.

Exercice III (7 pts) Soit $g : [0, +\infty[\times[0,1] \to I\!R_+$ une fonction mesurable telle que $g \in L^p([0, +\infty[\times[0,1])$ avec $1 \leq p < +\infty$. On pose

$$\forall x \in I\!R_+, \;\; F(x) = \int_0^1 g(x,y)dy$$

1) Montrer que pour presque tout $x \geq 0$, $0 \leq F(x) < +\infty$ et que $F \in L^p(I\!R_+)$ avec

$$||F||_{L^p(I\!R_+)} \leq ||g||_{L^p(I\!R_+ \times [0,1])}$$

2) Montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p \, dx \leq \int_0^{+\infty} \int_0^1 g(x,y) F(x)^{p-1} \, dy \, dx \quad (I)$$

3) Déduire de l'inégalité (I) que

$$||F||_{L^p(I\!R_+)} \leq \int_0^1 ||g(.,y)||_{L^p(I\!R_+)} \, dy$$