Université de Cergy-Pontoise - L3-S5

Calcul Intégral - Lundi 9 janvier 2006

Durée: 3h00 - Ni document ni calculatrice autorisés

Notations:
$\mathcal{B} = \mathcal{B}(I\!R)$ est la tribu borélienne de $I\!R$ et λ est la mesure de Lebesgue sur $I\!R$. On note 1_A la fonction indicatrice de l'ensemble A ($1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$).

Exercice I (6 pts)
1) La fonction $|\cos(x)|$ est-elle intégrable sur $I\!R$?
2) Pour $n \in I\!N^*$, on pose

$$\forall x \in I\!R, \;\; f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}} e^{-\frac{x^2}{n^2}} |\cos(x)|$$

a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in I\!N^*}$ est croissante.
b) Déterminer, si elle existe, la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$, pour $x \in I\!R$.
c) Déterminer, si elle existe, la limite de $\int_{I\!R} f_n \, d\lambda$ quand n tend vers $+\infty$. On justifiera soigneusement la réponse.
3) Pour $n \in I\!N^*$, on pose

$$\forall x \in I\!R, \;\; g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}} e^{-\frac{x^2}{n^2}} e^{-(n+1)x}$$

Quelle est la limite de $\int_{I\!R} g_n \, d\lambda$ quand n tend vers $+\infty$? On justifiera soigneusement la réponse.

Exercice II (8 pts)
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ mesure finie.
1) Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (I\!R_+, \mathcal{B})$ une fonction mesurable positive telle que $\int_\Omega f^2 \, d\mu < +\infty$.
a) Pour tout $\epsilon > 0$, on note

$$\{f > \epsilon\} = \{x \in \Omega / f(x) > \epsilon\}.$$

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\int_\Omega f^\alpha \, d\mu \ \leq \ \epsilon^\alpha \mu(\Omega) + \int_{\{f>\epsilon\}} f^\alpha \, d\mu.$$

b) Montrer que si $A \in \mathcal{T}$ est une partie mesurable de Ω et si $\alpha \in]0, 2[$, on a

$$\int_A f^\alpha \, d\mu \ \leq \ (\int_A f^2 \, d\mu)^{\frac{\alpha}{2}} \mu(A)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Dans la suite, on considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables positives sur Ω telle que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = 0 \quad \mu p.p.$$

Pour $\epsilon > 0$ fixé, on note

$$A_n = \{x \in \Omega \, / \, f_n(x) > \epsilon\}$$

2) a)Soit $x \in \Omega$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$. Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N} \, / \, \forall n \geq N, \ x \notin A_n$$

b) En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} 1_{A_n} = 0 \quad \mu \, p.p.$$

c) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = 0$$

3) On fait l'hypothèse supplémentaire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_\Omega f_n^2 \, d\mu \leq 1$$

En utilisant les inégalités obtenues au 1), montrer que pour tout $\alpha \in]0, 2[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_\Omega f_n^\alpha \, d\mu \ \leq \ \epsilon^\alpha \mu(\Omega) + \mu(A_n)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

puis en déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n^\alpha \, d\mu = 0$$

Exercice III (6 pts) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ mesure σ-finie. et soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (I\!R_+, \mathcal{B})$ une fonction mesurable positive. On note

$$E = \{(x,t) \in \Omega \times I\!R_+ \ /0 \leq t < f(x)\}$$

1) Justifier le fait que $E \in \mathcal{T} \bigotimes \mathcal{B}$.
2) Montrer que pour tout $x \in \Omega$,

$$\int_{I\!R_+} 1_E(x,t) d\lambda(t) \ = \ f(x)$$

3) En déduire que

$$\int_\Omega f \, d\mu \ = \ \int_{I\!R_+} \mu(\{x \in \Omega / f(x) > t\}) d\lambda(t)$$

4) En calculant de deux manières

$$\int_{I\!R_+} \int_\Omega p t^{p-1} 1_E(x,t) d\mu(x) d\lambda(t),$$

montrer que pour tout $p > 0$,

$$\int_\Omega f^p \, d\mu \ = \ p \int_{I\!R_+} t^{p-1} \mu(\{x \in \Omega / f(x) > t\}) d\lambda(t).$$