Université de Cergy-Pontoise **2014-2015**
L3 : Séries de Fourier et analyse complexe

Examen séries de Fourier et analyse complexe (Session1) : Mercredi 17 décembre

Durée : 3 heures.

Exercice 1 [Cours] : Enoncer et démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 2 : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, on considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, \ t \in [0, \pi] \\ -e^{-\alpha t} \ t \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

prolongée par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction est de classe C^1 par morceaux. Est-elle continue ? Tracer l'allure du graphe de la courbe pour $\alpha = 1$.

2) Calculer les coefficients de Fourier réels a_n et b_n de f. En déduire le développement en série de Fourier de f sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire la convergence de la série de terme général

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\alpha^2 + (2n+1)^2},$$

et calculer cette somme.

4) Calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\alpha\pi}(-1)^n - 1)^2 n^2}{(\alpha^2 + n^2)^2}.$$

Exercice 3 : Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{(n+1)^2 n!}$.

1) Quel est le rayon de convergence de f ?

2) Montrer que $f'(z) = \dfrac{(e^{-z} - 1)}{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3) Soit $g(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tz} - 1}{t} dt$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $\varphi(t) = \frac{e^{-tz}-1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et qu'elle se prolonge par continuité sur $[0, 1]$. En déduire que g est bien définie sur $\mathbb{C}$.

b) Montrer que $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4 : Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4+4} dx.$$

1) Montrer que l'intégrale ci-dessus est bien définie.

2) On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+4}.$$

Pour $R > 0$, on note γ_R le chemin fermé constitué du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle $C_R = \{z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$ orienté dans le sens positif.

a) Calculer les pôles de f et leur ordre.
b) Montrer que pour tout $R > 0$ suffisamment grand,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{4e}(\cos(1) + \sin(1)).$$

c) Montrer que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

d) Calculer

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz,$$

et en déduire la valeur de K.

Exercice 5 : 1) Enoncer le principe des zéros isolés.
2) Existe-t-il une fonction f holomorphe dans le disque unité $D(0,1)$ telle que pour tout entier $n > 0$, on ait

$$f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}?$$

Indication : On pourra introduire la fonction $g(z) = f(z) - z^2$ et utiliser 1).