Université de Cergy-Pontoise **2014-2015**
L3 : Séries de Fourier et analyse complexe

Examen séries de Fourier et analyse complexe (Session1) : Mercredi 17 décembre

Durée : 3 heures.

Exercice 1 [Cours] : Enoncer et démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Voir cours.

Exercice 2 : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, on considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, \ t \in [0, \pi] \\ -e^{-\alpha t} \ t \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

prolongée par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$.

1) La fonction f est clairement de classe C^1 par morceaux car $t \longrightarrow e^{\alpha t}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas continue en les points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En effet, au point 0, on a $f(0^+) = 1$ alors que $f(0^-) = -1$. De même, au point π on a : $f(\pi^-) = e^{\alpha\pi}$ alors que $f(\pi^+) = -e^{-\alpha\pi}$. D'où le résultat par 2π-périodicité de la fonction f.
2) La fonction étant impaire sur $]-\pi, \pi[$, les coefficients a_n valent 0 pour tout $n \geq 0$. On calcule les coefficients b_n pour $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\alpha t}\sin(nt), \\ &= \frac{1}{i\pi}\int_0^\pi (e^{(\alpha+in)t} - e^{(\alpha-in)t})dt, \\ &= \frac{1}{i\pi}\left(\left[\frac{e^{(\alpha+in)t}}{\alpha+in}\right]_0^\pi - \left[\frac{e^{(\alpha-in)t}}{\alpha-in}\right]_0^\pi\right), \\ &= \frac{1}{i\pi}\left(e^{\alpha\pi}(-1)^n - 1\right)\frac{-2in}{\alpha^2+n^2}, \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(1-e^{\alpha\pi}(-1)^n)\,n}{\alpha^2+n^2}. \end{aligned}$$

La série de Fourier est donc

$$S(f(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{(1-e^{\alpha\pi}(-1)^n)\,n}{\alpha^2+n^2}\sin(nt).$$

3) D'après le théorème de Dirichlet (la fonction f étant C^1 par morceaux), la série de Fourier converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ vers

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{(1-e^{\alpha\pi}(-1)^n)\,n}{\alpha^2+n^2}\sin(nt).$$

En particulier, pour tout $t \in]0,\pi[$ sur lequel la fonction f est continue, on a

$$e^{\alpha t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\left(1 - e^{\alpha\pi}(-1)^n\right) n}{\alpha^2 + n^2} \sin(nt).$$

On évalue cette dernière égalité au point $\frac{\pi}{2}$ et on obtient

$$e^{\frac{\alpha\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} (-1)^n \frac{\left(1 + e^{\alpha\pi}\right)(2n+1)}{\alpha^2 + (2n+1)^2}.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\alpha^2 + (2n+1)^2} = \frac{\pi e^{\frac{\alpha\pi}{2}}}{2(1 + e^{\alpha\pi})}.$$

4) On applique maintenant la formule de Bessel-Parseval. On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{2\alpha t} dt = \frac{e^{2\alpha\pi} - 1}{2\alpha}.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{\alpha\pi}(-1)^n)^2 n^2}{(\alpha^2 + n^2)^2} = \frac{\pi(e^{2\alpha\pi} - 1)}{4\alpha}.$$

Exercice 3 : 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2(n-1)!} \neq 0$. On utilise le critère de d'Alembert. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2(n-1)!}{(n+1)^2 n!} = \frac{n^2}{(n+1)^2 n} \to 0.$$

Donc $R = +\infty$ et la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2) D'après le cours, la fonction f' est la série obtenue en dérivant terme à terme la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{(n+1)^2 n!}$. De plus, la série dérivée a le même rayon de convergence $R = +\infty$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(n+1)(-z)^n}{(n+1)^2 n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{(n+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = \frac{e^{-z} - 1}{z}.$$

3) a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $\varphi(t) = \frac{e^{-tz}-1}{t}$ est clairement continue sur $(0,1]$ comme somme et quotient de fonctions continues sur $(0,1]$. Comme $e^{-tz} \sim 1 - tz$ lorsque $t \to 0$, on en déduit que $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = -z$ et donc, φ se prolonge par continuité en 0. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tz} - 1}{t} dt$ et donc la fonction g est toujours bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.
b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $\psi(t) = f(tz)$ qui est clairement derivable sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $t \in [0,1]$

$$\psi'(t) = z f'(tz) = z \frac{e^{-tz} - 1}{tz} = \varphi(t),$$

d'après 2). On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$g(z) = \int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 \psi'(t) dt = \psi(1) - \psi(0) = f(z).$$

Exercice 4 : Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4+4} dx.$$

1) Montrer que l'intégrale ci-dessus est bien définie.

La fonction $x \to \frac{\cos(x)}{x^4+4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\left|\frac{\cos(x)}{x^4+4}\right| \leq \frac{1}{x^4+4}$ qui est intégrable en $\pm\infty$. Donc l'intégrale K est bien définie.

2) On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+4}.$$

Pour $R > 0$, on note γ_R le chemin fermé constitué du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle $C_R = \{z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$ orienté dans le sens positif.

a) Calculer les pôles de f et leur ordre.
b) Montrer que pour tout $R > 0$ suffisamment grand,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{4e}(\cos(1) + \sin(1)).$$

c) Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

d) Calculer

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz,$$

et en déduire la valeur de K.

a) Un court calcul montre que

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+4} = f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-(1+i))(z-(-1+i))(z-(1-i))(z-(-1-i))}.$$

On en déduit que f possède des pôles simples en $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$.
b) Pour R assez grand, les seuls pôles de f à l'intérieur de γ_R sont $1+i$ et $-1+i$. D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \left(Res(f, 1+i) + Res(f, -1+i) \right).$$

Comme les pôles sont simples, on a

$$Res(f, 1+i) = ((z-(1+i))f(z))_{|z=1+i} = \frac{e^{i(1+i)}}{8i(1+i)},$$

et

$$Res(f, -1+i) = ((z-(-1+i))f(z))_{|z=-1+i} = \frac{e^{i(-1+i)}}{8i(1-i)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)dz &= \frac{\pi}{4e}\left(\frac{e^i}{1+i}+\frac{e^{-i}}{1-i}\right),\\
&= \frac{\pi}{8e}\left(e^i(1-i)+e^{-i}(1+i)\right),\\
&= \frac{\pi}{8e}\left(2\cos(1)+2\sin(1)\right),\\
&= \frac{\pi}{4e}(\cos(1)+\sin(1)).
\end{aligned}$$

c) Quand $z \in C_R$, on a $\left|e^{iz}\right| = \left|e^{-\Im(z)}\right| \leq 1$ et donc, pour $R > 1$, on obtient

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^4-1}.$$

On en déduit que lorsque $R \to \infty$, on a

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \to 0.$$

Donc

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

d) On obtient alors

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,+R]} f(z)dz = \frac{\pi}{4e}(\cos(1)+\sin(1)).$$

En prenant la partie réelle de cette égalité, on obtient

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x^4+4}dx = \frac{\pi}{4e}(\cos(1)+\sin(1)).$$

Exercice 5 : 1) Enoncer le principe des zéros isolés.

Une fonction f holomorphe sur un domaine non identiquement numme ne possède que des zéros isolés, c'est-à-dire que si $f(z_0) = 0$, alors $\exists r > 0$ tel que $\forall z \in \ \cap D(z_0, r)$, $f(z) \neq 0$.

2) Existe-t-il une fonction f holomorphe dans le disque unité $D(0,1)$ telle que pour tout entier $n > 0$, on ait

$$f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}?$$

Indication : On pourra introduire la fonction $g(z) = f(z) - z^2$ et utiliser 1).

La fonction g est holomorphe dans $D(0,1)$. De plus, elle s'annule en les points $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ par hypothèse. Mais $\frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc les zéros de g possèdent un point d'accumulation 0 dans $D(0,1)$. On déduit du principe des zéros isolés que $\forall z \in D(0,1)$, $g(z) = 0$. Donc $\forall z \in D(0,1)$, $f(z) = z^2$. Enfin, on vérifie que la fonction $f(z) = z^2$ vérifie bien

$$f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}.$$

Fonc $f(z) = z^2$ est l'unique fonction holomorphe dans $D(0,1)$ qui satisfait à l'énoncé.