Université de Cergy-Pontoise **2012-2013**
L3 : Analyse complexe

Examen d'analyse complexe (Session1) : lundi 22 avril 2013

Durée : 3 heures.

Exercice 1 [Cours] : Enoncer et démontrer le théorème de Weierstrass.

Exercice 2 : 1) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^3}.$$

2) On considère la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

a) Montrer que φ est holomorphe dans un voisinage de 0.
b) Décomposer φ en éléments simples, puis déterminer son développement en série entière en 0

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

c) Calculer le rayon de convergence du développement en série entière précédent.
d) En utilisant l'identité $(1-z-z^2)\varphi(z) = 1$, démontrer que $\forall n \geq 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
e) On note $C_R = C(0,R)$ le cercle de centre 0 et de rayon $R > 0$. Calculer (selon les valeurs de R) l'intégrale

$$\int_{C_R} \varphi(z) dz.$$

Exercice 3 : 1) Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 et continue sur $\overline{D(0,1)}$. Enoncer le principe du maximum pour f.

2) Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et soit $M = \max_{z \in \overline{D(0,1)}} (|P(z)|)$. Montrer que si $|z| \geq 1$, alors $|P(z)| \leq M|z|^n$.

Indication : On pourra considérer la fonction $f(z) = z^n P(\frac{1}{z})$ et utiliser 1).

Exercice 4 : Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}.$$

C'est-à-dire que la fonction $\frac{1}{\cosh(\pi x)}$ est égale à sa propre transformée de Fourier.

1) [Résultat préliminaire] Soient g, h deux fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On suppose que h a un zéro d'ordre 1 en $z_0 \in U$ et que $g(z_0) \neq 0$.
a) Montrer que $f = \frac{g}{h}$ a un pôle simple en z_0.
b) Montrer que

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

2) On considère la fonction $\cosh(\pi z) = \frac{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}{2}$. Quel est son domaine d'holomorphie ? Déterminer l'ensemble des zéros de $\cosh(\pi z)$ et calculer leur ordre.

3) Soit $\xi \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{-2i\pi z\xi}}{\cosh(\pi z)}.$$

On note γ_R le rectangle fermé constitué des segments $[-R, R]$, $[R, R+2i]$, $[R+2i, -R+2i]$ et $[-R+2i, -R]$ et orienté dans le sens positif.
a) Montrer que pour tout $R > 0$,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = -2e^{2\pi\xi}\left(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}\right).$$

b) Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[R,R+2i]} f(z)dz = 0, \quad \lim_{R\to\infty} \int_{[-R+2i,-R]} f(z)dz = 0.$$

c) On note

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

l'intégrale que l'on souhaite calculer. Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[R+2i,-R+2i]} = -e^{4\pi\xi} I.$$

d) Utiliser a), b) et c) pour montrer le résultat.

Exercice 5 : 1) Enoncer le principe des zéros isolés.
2) Existe-t-il une fonction f holomorphe dans le disque unité $D(0, 1)$ telle que pour tout entier $n > 0$, on ait

$$f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}.$$

Indication : On pourra introduire la fonction $g(z) = f(z) - z^2$ et utiliser 1).