L3-S5 - 2013/2014 - **Examen du 23 juin 2014** - Session 2

Examen d'Analyse de Fourier

Durée: **2** heures – Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés

---

On rappelle que la forme canonique d'une série trigonométrique en sa formulation complexe est $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ et en sa formulation réelle est $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.
On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{F}f)(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$.

Exercice 1 - Question de cours

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 par morceaux.

1. Rappeler la définition des coefficients de Fourier c_n de f et l'énoncé des théorèmes de Dirichlet et de Parseval.
2. Rappeler la définition des coefficients de Fourier a_n et b_n de f et l'énoncé des théorèmes de Dirichlet et de Parseval (avec ces coéefficients).
3. Particulariser la question précédente pour le cas où f est paire.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$, pour $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coéfficients a_0, a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la série de Fourier de f.
2. Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.
5. Utiliser les deux dernières questions pour montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
6. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

[Indications : pour 2) et 3) on pourrait donner des valeurs particulières à x ; on rappelle aussi la formule : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$]

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, \infty[\\ 1+x & \text{si } x \in]-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$

1. Calculer les intégrales $I_\pm(\xi) = \pm \displaystyle\int_0^{\pm 1} (1 \mp x) e^{-2i\pi\xi x} dx$.
2. En déduire l'expression de $\widehat{f}$, la transformée de Fourier de f.
3. Calculer les limites $\lim_{\xi \to \pm\infty} \widehat{f}(\xi)$.
4. Expliquer pourquoi aurait-on pu donner les valeurs des limites précédentes sans avoir eu à calculer l'expression de $\widehat{f}$.