EXAMEN D'ANALYSE DE FOURIER - L3-S5 - 2013-2014

19 DÉCEMBRE 2013

On rappelle que la forme canonique d'une série trigonométrique en sa formulation complexe est $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ et en sa formulation réelle est $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 par morceaux.

(1) Rappeler la définition des coefficients de Fourier c_n de f et l'énoncé des théorèmes de Dirichlet et de Parseval.

(2) Supposons f paire. Rappeler la définition des coefficients de Fourier a_n de f et l'énoncé des théorèmes de Dirichlet et de Parseval.

(3) Supposons f impaire. Rappeler la définition des coefficients de Fourier b_n de f et l'énoncé des théorèmes de Dirichlet et de Parseval.

Exercice 2. Soit f la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = |x|$ pour $-\pi \le x \le \pi$.

(1) Déterminer la série de Fourier de f.

(2) Justifier la relation $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$ si $-\pi \le x \le \pi$.

(3) Déterminer (i.e. calculer la somme) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(4) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(5) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

(6) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3. Soit f la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = x$ pour $-\pi < x \le \pi$.

(1) Déterminer la série de Fourier de f.

(2) Justifier la relation $\dfrac{x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx)$ si $-\pi < x < \pi$.

(3) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(4) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4. On rappelle que si la transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$ est $\hat{f}(\xi)$ alors les transformées de Fourier de $xf(x)$ et $\frac{d}{dx}f(x)$ sont $-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$ et $2\pi\mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi)$.

(1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \pi\mathrm{e}^{-2\pi|x|}$ et en déduire celle de $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) Calculer la transformée de Fourier de $j(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.
(On pourrait écrire cette fonction comme une dérivée et utiliser le résultat précédent concernant h.)

(3) Calculer la transformée de Fourier de $k(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.
(On écrit $k(x) = xj(x)$ et on utilise la question précédente.)

(4) Calculer la transformée de Fourier de $h^2(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.
(On pourrait exprimer h^2 en termes de h et k et utiliser les résultats des questions (1) et (4))