L3 - S5 - 2013/2014 Examen du 23.06.2014

CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ANALYSE de FOURIER - SESSION 2

EXERCICE 1 - QUESTION de COURS :

(1) $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, $n \in \mathbb{Z}$

Thm Dirichlet : Sous nos hypothèses, la série de Fourier de f : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, $\forall x$

Thm Parseval : $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} |f(x)|^2 dx$.

(2) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos(nx)\cdot f(x)\,dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin(nx)\cdot f(x)\,dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Thm Dirichlet : La série de Fourier de f

$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n\cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge en chaque x vers $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

Thm Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)$

(3) f paire $\Rightarrow$ $\int_{x_0}^{x_0+2\pi}$ (fonct périodique $T=2\pi$) $= \int_{-\pi}^{\pi}(\dots)$

Donc $\cos(n.) f$ = paire et $\sin(n.) f$ = impaire implique
$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx) f(x)\,dx & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n = 0 & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
donc les formules de Dirichlet et Parseval deviennent dans ce cas :

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)$$

EXERCICE 2 :

(1) $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3\cancel{\pi}}\cdot\pi^{\cancel{3}\,2} = \frac{2}{3}\pi^2$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x^2(\sin(nx))'dx \underset{\text{IPP}}{=}$

$\underset{\text{IPP}}{=} \frac{2}{n\pi}\Big(\underbrace{\left[x^2\sin(nx)\right]_0^\pi}_{\to\, = 0} - 2\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx\Big) \underset{\text{IPP}}{=}$

$= \frac{4}{n^2\pi}\Big(\underbrace{\left[x\cos(nx)\right]_0^\pi}_{\to\, = \pi\cdot(-1)^n} - \int_0^\pi \cos(nx)\,dx\Big)$

$= \frac{4(-1)^n}{n^2}$.

$b_n = 0$ car $x \mapsto f(x) = x^2$ est paire

Donc $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

(2) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc cf. thm. de Dirichlet on a $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = S_f(x)$ donc $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

(3) Soit $x = \pi$. Alors de (2) : $\frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(4) Soit $x = \frac{\pi}{2}$. Alors pour $\cos(n\frac{\pi}{2})$ on a 2 cas de figure :

$n \in 2\mathbb{N}+1$: $\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \cos(\pi k)\cos\frac{\pi}{2} - \sin(k\pi)\sin\frac{\pi}{2} = 0$

$n \in 2\mathbb{N}^*$: $\cos\left(\cancel{2}k \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

Donc la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ aura des "trous" pour tous les n impairs, donc, en posant $n = 2k$ et renotant k par n, on obtient de (2) : $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} \cdot (-1)^n$

$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$. **Obs** : le choix $x=0$ conduit au $\hat{m}$ résultat.

5 Tenant compte du fait que les séries de (3) et (4) sont cvgtes, en les sustrayant terme à terme, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\cancel{3}\pi^2}{\cancel{6}_2 \cdot 2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$= \frac{1-(-1)}{1} + \frac{1-1}{2^2} + \frac{1-(-1)}{3^2} + \dots$$

$$= 2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

d'où le résultat. **Obs** : on peut aussi faire autrement, mais on n'utilise que (3).

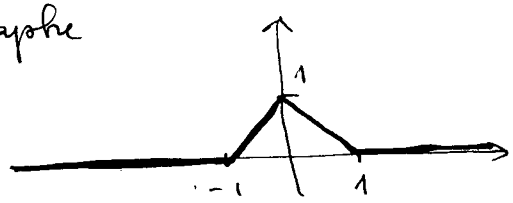
6 On applique le Thm de Parseval pour f = paire

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\pi^{\cancel{5}4}}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

EXERCICE 3 : Obs : graphe



(1) $I_- = \int_{-1}^{0} (1+x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx =$

$= \int_{-1}^{0} (1+x) \left(\frac{e^{-2i\pi\xi x}}{-2i\pi\xi}\right)' dx \underset{IPP}{=} \left[\frac{(1+x)\, e^{-2i\pi\xi x}}{-2i\pi\xi}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2i\pi\xi}\int_{-1}^{0} e^{-2i\pi\xi x}\, dx$

$= \dots = \frac{i}{2\pi\xi} + \frac{1}{4\pi^2\xi^2} - \frac{e^{2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}$

Pareillement, on trouve $I_+ = \frac{-i}{2\pi\xi} + \frac{1}{4\pi^2\xi^2} - \frac{e^{-2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}$

(2) $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx = \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty}}_{=0 \text{ car } f=0 \text{ sur } \mathbb{R}\setminus[-1,1]} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}\right) f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx$

$\overset{(2)}{=} \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}_2\pi^2\xi^2} - \frac{1}{2\pi^2\xi^2}\left(\frac{e^{i2\pi\xi} + e^{-i2\pi\xi}}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2\pi^2\xi^2}\left(1 - \cos(2\pi\xi)\right) = \frac{\cancel{2}\sin^2(\pi\xi)}{\cancel{2}\pi^2\xi^2}$

(3) $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \frac{1}{\pi^2\xi^2} \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{} 0$

(4) La fonction f est bien évidemment intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ (son $\int$ = aire du triangle). Or, le Lemme de Riemann - Lebesgue assure que la transformée de Fourier de toute fonction intégrable est une fonction qui tend à zéro à l'∞ (i.e. à $\pm\infty$).