Examen d'analyse de Fourier 18 décembre 2012

Exercice 1:

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

prolongée par périodicité.

1) Déterminer les dérivées à droite et à gauche de f aux points $x = 0$ et $x = \pi$. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

2) Vérifier que les coefficients de Fourier de f sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{e^\pi (-1)^n - 1}{1 + n^2}, \qquad b_n = -\frac{n}{\pi} \frac{e^\pi (-1)^n - 1}{1 + n^2}$$

et écrire la série de Fourier de f

3) En utilisant le théorème de Dirichlet, préciser la somme de cette série de Fourier à l'aide de f. En déduire la valeur de la somme :

$$U = \sum_0^\infty \frac{e^\pi (-1)^n - 1}{1 + n^2}$$

puis de celle de :

$$V = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{e^\pi (-1)^n - 1}{1 + n^2}$$

En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_0^\infty \frac{1}{1 + (2p)^2}$$

et

$$\sum_0^\infty \frac{1}{1 + (2p+1)^2}$$

puis de celle de

$$\sum_0^\infty \frac{1}{1 + n^2}$$

En utilisant le théorème de Dirichlet aux points $\pi/2$ et $-\pi/2$, dterminer les valeurs des sommes

$$T = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p (2p+1)}{1 + (2p+1)^2}, \quad S = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p}{1 + (2p+1)^2}$$

Exercice 2:

On rappelle que la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est la fonction $\lambda \mapsto e^{-\pi \lambda^2}$.

1) Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-\pi x^2 - 2\pi x}$$

appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

2) Calculer sa transformée de Fourier (On pourra utiliser la variable $x + 1$).

3) En précisant les hypothèses de validité des théorèmes utilisés, en déduire les transformées de Fourier de $x \mapsto x f(x)$. et de f'.