Examen d'analyse de Fourier, Mercredi 14 décembre 2011

Exercice 1
On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, \ t \in [0, \pi[\\ 0, \ t \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

prolongée par périodicité à $\mathbb{R}$.
1) Montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
2) Calculer ses coefficients de Fourier.
3) La série de Fourier est elle normalement convergente?
4) Calculer $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(4p^2)-1}$, puis $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.
Exercice 2 :
1) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. On rappelle que sa transformée de Fourier est $x \mapsto \pi e^{-2\pi|x|}$.
2) En déduire pour $a \in R$, la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$, puis pour $a \neq \pm 1$ celle de $\frac{1}{(1+x^2)(a^2+x^2)}$.
3) On veut calculer la transformée de $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4) Calculer $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1+x^2})$. Calculer la tranformée de Fourier de $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.
5) En déduire la transformée de $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$.
6) Calculer la tranformée de $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
Exercice 3 :
On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin^3 t}{t}, \ t > 0 \\ 0, \ t \leq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue et causale. Montrer que $I(f) =]0, \infty[$.

2) Soit pour $x > 0$ $F(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}dt$.
a) En utiisant un théorème du cours montrer que F est dérivable pour $x > 0$ et donner son expression sous forme d'une intégrale.
b) Calculer cette intégrale . On pourra utiliser la formule de trigonométrie $\sin^3 t = \frac{3\sin t - \sin(3t)}{4}$ après l'avoir démontré.
c) Donner l'expression de $F(x)$, en intégrant la fonction trouvée et en utilisant une propriété de F au voisinage de l'infini.
d) Remarquer que la formule définissant F se prolonge au point 0. (On utilisera la valeur admise de $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$).

Exercice 4 :

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = te^{-t}$$