Examen d'analyse de Fourier, Jeudi 16 décembre 2010

Exercice 1:
On considère la fonction pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$,

$$f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, \ t \in [0, \pi[\\ -e^{-\alpha t}, \ t \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

prolongée par périodicité à $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Est-elle continue? Tracer le graphe de la courbe.
2) Calculer les coefficients de Fourier de f.
3) Montrer la convergence de la série de terme général

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+1)}{\alpha^2 + (2p+1)^2}$$

et calculer cette somme.
4) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\alpha\pi}(-1)^n - 1)^2 n^2}{(\alpha^2 + n^2)^2}$.

Exercice 2:
1) Montrer que la fonction $x \mapsto \pi e^{-2\pi|x|}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. Calculer sa transformée de Fourier . En déduire en justifiant le théorème utilisé la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
2) En déduire pour $a \neq 0$ la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+a^2x^2}$.
3) Calculer pour $a \neq 1$ $\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}\right)$.
4) On veut calculer $\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)$.

a) Calculer $\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)$.
b) Montrer que la fonction $y \mapsto ye^{-2\pi|y|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Déduire de ces deux résultats la valeur de $\mathcal{F}\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)$.
d) En déduire $\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)$.

Exercice 3:
On note $U(t) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$.
Donner l'abscisse de convergence pour la fonction $f(t) = U(t)(t^2+1)\cos(3t)$ et calculer sa transformée de Laplace.

Exercice 4:
Calculer la solution de l' équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + 2y' + y = te^{-t} \quad \text{ pour } t \in [0, \infty[\\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{array} \right.$$

On pourra utiliser la transformée de Laplace.
Retrouver le résultat en utilisant un théorème du cours sur les solutions d'équations différentielles à coefficients constants.