**Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S5**

**Examen - Analyse Complexe - Session 1 (17 décembre 2009)**

*Durée : 3h00 - Ni document ni calculatrice autorisés.*

Les 3 exercices sont indépendants.

**Exercice I**

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(z) = a(x)\cos(y) + ib(x)\sin(y)$$

1. Soient $P = Re(f)$ et $Q = Im(f)$. Donner l'expression des dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ à l'aide des dérivées des fonctions $a$ et $b$.
2. Supposons dorénavant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} a'(x) = b(x) \\ b'(x) = a(x) \end{cases} \qquad (*)$$

   (a) Montrer que $f$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

   (b) Montrer que $a$ vérifie une équation différentielle.

   (c) En déduire que $f$ est alors de la forme $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = Ae^z + Be^{-z}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
   (Indication : on commencera par résoudre le système $(*)$)

**Exercice II**

Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1}$ ? Etudier le comportement sur le cercle de convergence. On note $F(z)$ la somme de cette série entière.
2. Montrer que $F$ vérifie : $\forall z \in D, \;\; F'(z) = \dfrac{1}{1-z}$ et $F(0) = 0$.
3. Pour $z \in D$, on pose $\phi(z) = (1 - z)e^{F(z)}$.

   (a) Calculer $\phi'(z)$ pour $z \in D$.

   (b) En déduire que pour tout $z \in D$, $e^{F(z)} = \dfrac{1}{1-z}$.
4. On note $g(z) = \exp(-\frac{F(-z))}{2})$ pour $z \in D$. Montrer que la fonction $g$ vérifie

$$\forall z \in D, \;\; g(z)^2 = 1 + z \;\text{ et }\; g(0) = 1.$$

   Que vaut $g(x)$ pour $x$ réel, $-1 < x < 1$ ? On justifiera soigneusement la réponse.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Construire à l'aide de la fonction $F$ une fonction $g_n$ holomorphe sur $D$ telle que

$$\forall z \in D, \;\; (g_n(z))^n = 1 + z \;\text{ et }\; g_n(0) = 1.$$

**Exercice III**

Pour $\alpha > 0$, on définit la fonction $f$ par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + \alpha^2}.$$

1. Quels sont les singularités de la fonction $f$ ? Quelle est leur nature ? Déterminer les résidus de la fonction $f$ au voisinage de ses pôles éventuels.
2. Pour $R > \alpha$, soit $C_R^+$ le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon $R$ défini par

$$C_R^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R \text{ et } Im(z) > 0\}$$

   et soit $\gamma_R$ le lacet constitué du segment réel $[-R, R]$ suivi de $C_R^+$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique direct. Montrer que pour tout $R > \alpha$,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

3. Montrer que si $z \in C_R^+$ avec $R > \alpha$, alors on a

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^2 - \alpha^2},$$

   et ensuite que l'on a, pour tout $R > \alpha$,

$$\Big| \int_{C_R^+} f(z)dz \Big| \leq \frac{\pi R}{R^2 - \alpha^2}.$$

4. En déduire que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

5. Donner la valeur de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + \alpha^2} dx$$

   puis de

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + \alpha^2} dx.$$