CORRIGÉ de l'EXAMEN D'ANALYSE COMPLEXE

SESSION 1 - 2009-2010 (17.12.2009)

EXERCICE I (1) $P(x,y) = a(x)\cos y$; $Q(x,y) = b(x)\sin y$

d'où $\frac{\partial P}{\partial x} = a'(x)\cos y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = b'(x)\sin y$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -a(x)\sin y$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = b(x)\cos y$

(2) (a) Clairement, f vue comme fonction : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (à savoir $f(x,y) := (P(x,y), Q(x,y))$) est différentiable donc il suffira de lui imposer les conditions de Cauchy-Riemann en chaque $z = x+iy \in \mathbb{C}$, à savoir :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (a'(x) - b(x))\cos y = 0 \\ (a(x) - b'(x))\sin y = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Or, on voit que le système (*) de l'énoncé ne pose pas de contrainte sur y et pour x, il implique (S), $\forall x \in \mathbb{R}$. Conclusion f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(b) (Obs : L'hypothèse nous dit que a, b sont (seulement) dérivables, mais sous l'hypothèse (*), comme b est dérivable et $a' = b$ il résulte a = 2 fois dérivable, et ainsi de suite. Donc, par recurrence on peut montrer que $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$.). En particulier (*) implique : $a'' = b' = a$ d'où $a'' - a = 0$ dont l'éq. caract. $r^2 - 1 = 0$ fournit la sol. générale : $a(x) = Ae^x + Be^{-x}$ $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$. De même $b(x) = Ae^x - Be^{-x}$ pour le <u>même</u> couple (quelconque) $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ que pour a.

(c) À (b) on a déjà résolu (*) donc :

$$f(z) = Ae^x(\cos y + i\sin y) + Be^{-x}(\cos y - i\sin y) = Ae^x e^{iy} + Be^{-x}e^{-iy} = Ae^z + Be^{-z}$$

$(\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C})$.

EXERCICE II : (1) Avec la formule de d'Alembert $R = 1$, donc la série converge sur D. Etude sur $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, donc de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$

Si $\theta = 0$ c'est une série de Riemann, donc divergente.

Si $\theta \neq 0$: $u_n = 1/n$, $v_n = e^{in\theta}$ (θ fixé !) donc $u_n \to 0$, $n \to \infty$ et $\left|\sum_{n=1}^{p} v_n\right| = \left|e^{i\theta}\frac{e^{ip\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right| = \left|\frac{\sin(p\frac{\theta}{2})}{\sin(\theta/2)}\right| \leq M_\theta < \infty$. Donc série cvgte (par critère d'Abel)

(2) D'après (1), on peut dériver $F(z)$ terme à terme (en chaque $z \in D$) en obtenant la série dérivée $F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ sur D. Par ailleurs, $F(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$ donc $F(0) = 0$.

(3) (a) Remarquer que ϕ est holomorphe sur D, car produit entre la composée $\exp \circ F$ (holomorphe sur D) et $z \mapsto 1-z$, entière. Donc ϕ' est bien définie sur D et $\phi'(z) = ((1-z)e^{F(z)})' =$
$= -e^{F(z)} + (1-z)F'(z)e^{F(z)} \overset{(2)}{=} -e^{F(z)} + e^{F(z)} = 0$

(b) Donc en intégrant $\phi' = 0$ on a $\phi = \text{cte} \in \mathbb{C}$, d'où $e^{F(z)} = \frac{\text{cte}}{1-z}$ et comme $F(0) = 0$ on a nécess. cte $= 1$.

(4) $g(z)^2 = \exp(-F(-z))$ sur D et comme D est invariant par rapp. à $z \mapsto -z$ et $\exp(-\cdot)$ et F sont holomorphes sur D, on a que g, g^2 le sont aussi. En (3.b) on change la variable de z en $-z$ et on obtient $g^2(z) = 1+z$ et $g(0) = \exp(-\frac{1}{2}F(0)) = \exp(0) = 1$. D'après ce qu'on a dit avant, g^2 est le prolongement holomorphe de $g^2(x) = 1+x$ au disque complexe D, quand $x \in]-1,1[$. Donc $g(x) = \pm\sqrt{1+x}$ si $x \in]-1,1[$. et $g(0) = 1$ et g continue $\Rightarrow g(x) = +\sqrt{1+x}$.

(5) $g_n(z) = \exp\left(-\frac{F(-z)}{n}\right)$ convient.

EXERCICE III (1) $z = x+iy$ donc $e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$ donc $|e^{iz}| = e^{-y} \neq 0$. Il n'y a donc pas de zéros du numérateur et pour le dénominateur les zéros sont $\pm i\alpha$. Donc les seules singularités de f sont $\pm i\alpha$ et ce sont des pôles simples car les limites ci-dessous existent, $\in \mathbb{C}$ et valent

$$\lim_{z \to \pm i\alpha} (z - (\pm i\alpha)) f(z) = \frac{e^{i(\pm i\alpha)}}{(\pm i\alpha - (\mp i\alpha))} = \frac{\pm e^{\mp\alpha}}{2i\alpha} = \mathrm{Res}(f; \pm i\alpha)$$

VERSIONS :

Autrement : f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\alpha\}$ et :

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{2i\alpha(z-(i\alpha))} - \frac{e^{iz}}{2i\alpha(z-(-i\alpha))}$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{2i\alpha} \cdot \frac{e^{i(z-i\alpha)}}{z-i\alpha} - \frac{e^{+\alpha}}{2i\alpha} \frac{e^{i(z-(-i\alpha))}}{z-(-i\alpha)}$$

$$= \frac{e^{-\alpha}}{2i\alpha} \cdot \frac{1}{z-i\alpha} + \text{fonction holomorphe sur un disque de rayon} < 2\alpha \text{ autour de } +i\alpha$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f; i\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{2i\alpha}$$

... mais aussi...

$$f(z) = -\frac{e^{+\alpha}}{2i\alpha} \cdot \frac{1}{z-(-i\alpha)} + \text{fonction holomorphe sur un disque de rayon} < 2\alpha \text{ autour de } -i\alpha$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f; -i\alpha) = -\frac{e^{+\alpha}}{2i\alpha}$$

Autrement : Utiliser le théorème des résidus pour des courbes $\gamma_\pm$ = frontière de disques $D_\pm$ centrés sur $\pm i\alpha$ et de rayon $< 2\alpha$. On a :

$$\oint_{\gamma_\pm} f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f; \pm i\alpha)$$ et d'autre part, avec la formule de Cauchy :

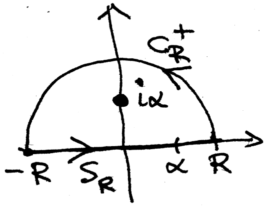
$$\oint_{\gamma_\pm} f(z)\,dz = \int_{\gamma_\pm} \frac{e^{z}}{(z-(i\alpha))(z-(-i\alpha))}\,dz = 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{z-(\mp i\alpha)}\right]_{z=\pm i\alpha}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{\mp\alpha}}{\pm i\alpha - (\mp i\alpha)} = 2\pi i \frac{\pm e^{\mp\alpha}}{2i\alpha}.$$ Donc

$$\mathrm{Res}(f; \pm i\alpha) = \pm \frac{e^{\mp\alpha}}{2i\alpha}$$, ce qu'on avait obtenu auparavant

(2) $\gamma_R = S_R \cup C_R^+$ où $S_R = [-R, R]$

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f; +i\alpha) \underset{(1)}{=} \frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha}$$



(3) $z \in C_R^+ \iff z = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in]0,\pi[$, donc

$$|f(z)| = \frac{|\exp(Rie^{i\theta})|}{|R^2e^{2i\theta} + \alpha^2|} = \frac{e^{-R\sin\theta}}{|R^2 + e^{-2i\theta}\alpha^2|} \underset{R>0}{\leq} \frac{1}{|R^2 - \alpha^2|}$$

or $|R^2 - \alpha^2| = R^2 - \alpha^2$ car $R > \alpha$. Ensuite :

$$\left|\oint_{C_R^+} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \leq \sup_{\theta \in]0,\pi[} |f(Re^{i\theta})| \cdot R \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi R}{R^2 - \alpha^2}$$

(4) $\oint_{\gamma_R} = \oint_{C_R^+} + \oint_{S_R}$ et $\oint_{S_R} f(z) = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$ et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+\alpha^2}\,dx$ est cvgte, on a :

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{:=} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Donc $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{R^2 - \alpha^2}}_{=0} = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz.$$

(5) De (4) & (2) on déduit :

$$I = \frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha} \quad \text{et} \quad J = \mathrm{Re}\, I = I.$$