Université de Cergy-Pontoise - L3 - 2008/2009

Examen d'Analyse complexe - session 2 (25 juin 2009)

Durée: **2** heures – Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 :

1. Rappeler la définition d'une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$.
2. Enoncer les conditions de Cauchy-Riemann pour une telle fonction.
3. Déterminer les fonctions $f(z) = f(x+iy)$ holomorphes sur $\mathbb{C}^*$ dont la partie réelle est $\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Exercice 2 : Soit $r > 0$. Notons $C(0,r)$ le cercle centré en 0 et de rayon r, orienté dans le sens trigonométrique et $D(0,r)$ le disque ouvert centré en 0 et de rayon r.

1. (a) Soit $\xi \in \mathbb{C}^*$. Ecrire le developpement en série entière en 0 de la fonction $z \to \dfrac{1}{1-z/\xi}$ en précisant son rayon de convergence.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{d\xi}{\xi^k(\xi - z)}$ pour $z \in D(0,r)$. (On pourra utiliser (a)).

2. Soit f une fonction analytique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, contenant l'origine. Soit $0 < r < \rho$ tel que $D(0,\rho) \subset \Omega$. Soit f_n la fonction définie sur $D(0,\rho)\backslash\{0\}$ par

$$f_n(z) = \frac{1}{z^n}\left[f(z) - f(0) - z\frac{f'(0)}{1!} - ... - z^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\right].$$

   (a) Montrer que f_n se prolonge en une fonction $\widetilde{f_n}$ analytique sur $D(0,\rho)$.

   (b) Montrer que $\widetilde{f_n}(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{f_n(\xi)d\xi}{(\xi - z)}$, pour $z \in D(0,r)$.

   (c) En déduire que

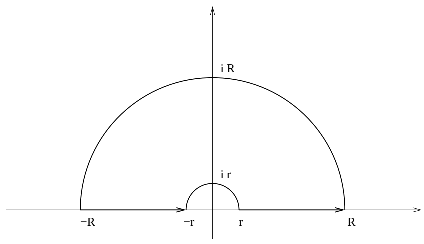
$$\widetilde{f_n}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi^n(\xi - z)}.$$

Exercice 3 : On définit sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* \mid -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ la fonction "*Log*" par $Log(z) = \ln|z| + i\theta$ où $\theta = \arg z$.

1. (a) Préciser $Log(z)$ lorsque $z \neq 0$ est réel.

   (b) Montrer que la fonction Log est holomorphe sur Ω.

2. Pour $0 < r < R$ soit $\gamma_{r,R}$ le chemin fermé orienté dans le sens direct défini par les deux demi-cercles centrés à l'origine, de rayons r, R, situés dans le demi-plan supérieur, et les deux segments sur l'axe réel $[-R,-r]$ et $[r,R]$ (voir figure ci-contre).



   (a) Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_{r,R}} \frac{Log(z)}{1+z^2}dz$ par la formule des résidus.

   (b) Paramétrer $\gamma_{r,R}$ et exprimer cette intégrale comme somme d'intégrales simples.

   (c) Montrer que les intégrales sur les demi-cercles tendent vers 0 lorsque $r \to 0$ et $R \to \infty$.

   (d) Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ converge, et montrer que cette intégrale est nulle.