Université de Cergy-Pontoise - L3 - 2008-2009

Examen d'analyse complexe

$1^{\text{ère}}$ session - 17 Décembre 2008

Durée: **3** heures

I. Exercice

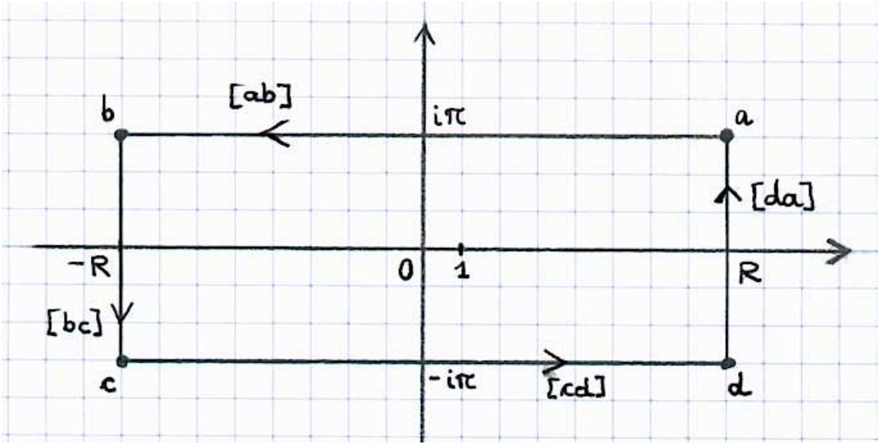
Soit la fonction $f(z) = z^2 + i$, définie sur $\mathbb{C}$.

1. Soit le demi-plan $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\, z > 0\}$. On veut montrer qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe sur P, telle que $r^2 = f$ sur P. On raisonne par l'absurde.
   - (a) On suppose qu'une telle fonction r existe. Exprimer la dérivée r' en fonction de r.
   - (b) Trouver un point $z_0 \in P$ tel que $z_0^2 + i = 0$. Préciser la contradiction en considérant $r'(z_0)$.
2. Soit $g = \text{Log} \circ f$ où Log est la détermination principale du logarithme complexe.
   - (a) Trouver le domaine $\mathcal{H}$ où g est holomorphe.
   - (b) Préciser l'expression d'une fonction r, holomorphe sur $\mathcal{H}$, vérifiant $r^2 = f$.
3. Comparer les conclusions des questions (1) et (2).

II. Problème

1. Soit la fonction $h(z) = \sinh(z)$, $z \in \mathbb{C}$.
   - (a) Vérifier que h est périodique.
   - (b) Préciser ses zéros et leur ordre de multiplicité.
2. Soit la fonction $f(z) = \dfrac{1}{\sinh(z)}$.
   - (a) Préciser son domaine de définition $\mathcal{D}$, ses pôles et leur ordre de multiplicité.
   - (b) Trouver les rayons r et ρ ($r \leq \rho$) de la couronne de convergence $C(0; r, \rho)$ du développement de Laurent de f en chaque pôle.
   - (c) Préciser le résidu de f en chaque pôle.
   - (d) Ecrire le développement de Laurent de f en 0 en s'arrêtant à l'ordre 3 de la partie série entière de ce développement.
   - (e) Montrer que la fonction $f(z) - \dfrac{1}{z}$ admet un prolongement analytique en 0 et calculer sa valeur en 0.
3. Soit la fonction $g(z) = \dfrac{1}{z^2 \sinh(z)}$.
   - (a) Préciser ses pôles et leur ordre de multiplicité.
   - (b) Calculer son résidu en 0.

4. Soit $R > 0$. Soit le rectangle E_R de sommets $a = R + i\frac{\pi}{2}$, $b = -R + i\frac{\pi}{2}$, $c = -R - i\frac{\pi}{2}$, $d = R - i\frac{\pi}{2}$, dont le bord ∂E_R est l'union des segments $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$, $[da]$ parcourus dans le sens direct (cf. figure).



(a) Calculer par la méthode des résidus

$$I_R = \int_{\partial E_R} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

(b) Montrer, en utilisant la définition d'une integrale curlivigne, que

$$\left|\int_{[da]} g(z)\,\mathrm{d}z\right| + \left|\int_{[bc]} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{2\pi}{R^2\sinh(R)}.$$

(c) En utilisant à nouveau la définition d'une integrale curlivigne, exprimer

$$\int_{[ab]} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[cd]} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

(d) En déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2 - \pi^2}{(4x^2+\pi^2)^2\cosh(x)}\,\mathrm{d}x.$$