CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ANALYSE COMPLEXE Session 2 (2008-2009)

Exercice 1 : a) question de cours.

b) $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ où P, Q sont à valeurs réelles est holomorphe sur Ω si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ sur Ω.

Methode I :

c) Soit $P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, Alors $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

On cherche $Q(x,y)$ tel que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. D'où $Q(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$

et $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y)$

$= \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Donc $\varphi'(y) = 0$, $Q(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \text{cte}$,

$f(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + \text{cte}$ ou encore $f(z) = \frac{1}{z} + \text{cte}$, $z \neq 0$.

Methode 2 :

$x^2+y^2 = z\cdot\bar{z}$ et $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, d'où

$$P(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Donc $f(z) = \frac{1}{z} + i\,\text{Const}$ où $\text{Const} \in \mathbb{R}$.

Si $\tilde{f}$ est une autre fonction analytique avec $\mathrm{Re}\,\tilde{f} = \frac{x}{x^2+y^2}$ alors $\mathrm{Re}(\tilde{f}-f) = 0 \Rightarrow \tilde{f}-f$ est une fonction analytique avec $\mathrm{Re}(\tilde{f}-f) = 0 \Rightarrow$ $\tilde{f}-f = \text{const} \in i\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ toute fonction fanalytique avec $\mathrm{Re}\,f = \frac{x}{x^2+y^2}$ est de la forme $\frac{1}{z} + i\,\text{Const}$ avec $\text{Const} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 1. a) $\dfrac{1}{1-z/\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\xi}\right)^n$ converge normalement dans $D(0,|\xi|)$

---

b) D'apres a), $\dfrac{1}{\xi^k(\xi-z)} = \dfrac{1}{\xi^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\xi}\right)^n$ qui converge normalement dans $D(0,|\xi|)$, c à d lorsque $|z|<|\xi|$

$\Rightarrow$ pour tout $z \in D(0,r)$ la serie

$\xi \mapsto \dfrac{1}{\xi^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\xi}\right)^n = \dfrac{1}{\xi^k(\xi-z)}$ converge normalement sur $C(0,r)$

$$\Rightarrow \int_{C(0,r)} \frac{d\xi}{\xi^k(\xi-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{C(0,r)} \frac{z^n}{\xi^{n+k+1}}\,d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{C(0,r)} \frac{d\xi}{\xi^{n+k+1}}$$

Or $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{d\xi}{\xi^m} = 0$ si $m \neq +1$ et $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{d\xi}{\xi^m} = 2\pi i$ si $m=1$.

Donc $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{d\xi}{\xi^k(\xi-z)} = \begin{cases} 2\pi i\, z^{-k} & \text{si } k \leq 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$

---

2 a) f est analytique sur $\Omega \Rightarrow$ au voisinage de 0 (car $0\in\Omega$) on a

$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \Rightarrow$

$f_n(z) = \dfrac{1}{z^n}\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^{k-n} \longrightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ lorsque $z \to 0$

La fonction f_n est donc analytique sur $D(0,\rho)\setminus\{0\}$ et admet une limite en 0

$\Rightarrow$ elle se prolonge en fonction analytique

$$\tilde{f}_n(z) = \begin{cases} f_n(z) & \text{si } z \neq 0 \\ \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

sur $D(0,\rho)$.

b) C'est la formule de Cauchy appliquée à la fonction analytique $\tilde{f}_n$ sur $D(0,\rho)$ et au compact à bord $\overline{D(0,r)} \subset D(0,\rho)$.

c) D'après b), $\tilde{f}_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi^n(\xi - z)}\,d\xi$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,\frac{1}{\xi^{n-k}}\cdot\frac{1}{\xi - z}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)}{\xi^n(\xi - z)}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\int_{C(0,r)} \frac{1}{\xi^{n-k}(\xi - z)}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)}{\xi^n(\xi - z)}\,d\xi \quad \text{car d'après 1 b),}$$

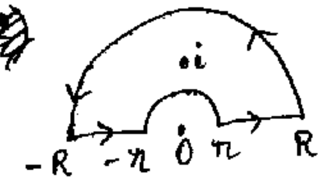
$$\int_{C(0,r)} \frac{d\xi}{\xi^{n-k}(\xi - z)} = 0 \quad \forall\, k < n.$$

Exercice 3

1) a) si x est réel >0, $\log x = \ln x$

si x est réel <0, $\log x = \ln|x| + i\pi$

b) Par un théorème du cours (fin du chapitre I) la fonction Arg z et la fonction log admettent une détermination continue sur Ω, alors Log est holomorphe, de dérivée $1/z$ sur Ω.

2) 

a) $\gamma_{r,R}$ est le bord d'un compact à bord $K_{r,R}$ inclus dans Ω. Par b) le seul pôle de $\frac{\log z}{1+z^2}$ dans $K_{r,R}$ est $z=i$, si $r<1<R$. Par la formule des résidus (i est un pôle simple)

$$\int_{\gamma_{r,R}} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz = 2i\pi\left(\text{Résidu } \frac{\log z}{1+z^2} \text{ en } z=i\right) = 2i\pi\,\frac{\log i}{2i} = i\frac{\pi^2}{2}$$

b) D'autre part

$$\int_{\gamma_{r,R}} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz = \int_r^R \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_0^\pi \frac{\ln R + i\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}\, iRe^{i\theta}\,d\theta$$

$$+ \int_{-R}^{-r}\frac{\ln|x|+i\pi}{1+x^2}\,dx + \int_\pi^0 \frac{\ln r + i\theta}{1+r^2e^{2i\theta}}\, ir e^{i\theta}\,d\theta = 2\int_r^R \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + i\pi\left[\text{Arctg}\, x\right]_{+r}^{+R}$$

$+ I_R - I_r$, car $\displaystyle\int_{-R}^{-r}\frac{dx}{1+x^2} \overset{x'=-x}{=} \int_R^r \frac{-dx'}{1+x'^2} = \int_r^R \frac{dx'}{1+x'^2}$.

c)

$$I_R = R\left|\int_0^\pi \frac{\ln R+i\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}\,e^{i\theta}\,d\theta\right| \le \int_0^\pi \frac{R\ln R}{-1+R^2}\,d\theta + \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}\,\theta\,d\theta = \pi\frac{R\ln R}{R^2-1} + \frac{\pi^2}{2}\frac{R}{R^2-1}$$

donc $I_R \to 0$ si $R\to\infty$. De même

$I_r \le \dfrac{\pi r|\ln r|}{1-r^2} + \dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{r}{1-r^2}$ donc $I_r \to 0$ si $r\to 0^+$.

d) L'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ est généralisée en 0 et ∞.

Comme $0<\ln x<\sqrt{x}$ si $x>0$ est assez grand, et comme $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, on a : $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}$ converge. Aussi, comme $0 < \frac{-\ln x}{1+x^2} \le -\ln x$ sur $]0,1]$ et comme $\int_0^1(-\ln x)\,dx$ converge, $\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}$ converge.

En conclusion, $I = \int_0^1 \dots + \int_1^\infty \dots$ converge.

e) Par b), c) et d), $\displaystyle\int_{\gamma_{r,R}} \frac{\text{Log}\, z}{1+z^2}\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{r\to 0} 2\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2}$.

Par ailleurs, en utilisant a) on voit que la limite ci-dessus vaut $i\frac{\pi^2}{2}$. Donc $2\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$.