Université de Cergy - L3 - 2008-2009 - Mathématiques

ANALYSE COMPLEXE - 2008-2009 SESSION 1

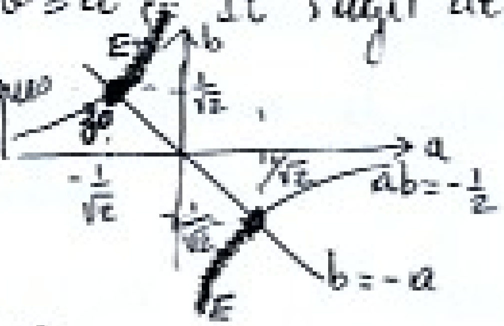
Corrigé de l'examen d'analyse complexe

Exercice 1) a) Supposons qu'il existe π holomorphe sur P t.q. $\pi^2(z) = z^2+i$.
Alors $2\pi\pi' = 2z$ càd $\pi'(z) = \frac{z}{\pi(z)}$, $z \in P$.

b) On cherche $z_0 = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$, $b>0$ telle que $z_0^2 = a^2-b^2+2iab =$
D'où $a = \pm b$ et $2ab = -1$ ou encore $a = \pm b$ et $\pm 2b^2 = -1$.
Comme $b \in \mathbb{R}$, il faut $a = -b$ et $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) = e^{3\ldots}$

c) la contradiction vient du fait que $\frac{z_0}{\pi(z_0)}$ n'existe pas puisque $z_0 \neq 0$ et $\pi^2(z_0) = 0$ implique $\pi(z_0) = 0$.

2) a) $\log(z^2+i)$ est définie et holomorphe (par composition de fonctions holomorphes) si $z^2+i \notin \mathbb{R}^-$.
Cherchons $E = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2+i \in \mathbb{R}^-\} = \{a+ib,\ a,b\in\mathbb{R} \mid a^2-b^2+2iab+i \in \mathbb{R}^-\}$
$= \{a+ib,\ a,b \in \mathbb{R} \mid ab = -\frac{1}{2} \text{ et } b^2 \geq a^2\}$. Il s'agit de deux morceaux d'hyperbole, symétriques par rapport à l'origine.



b) la fonction $\pi(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2+i)} = e^{g(z)}$ est holomorphe en dehors de E par composition, et satisfait $\pi^2(z) = e^{\log(z^2+i)} = z^2+i$

3) la fonction π trouvée en 2) n'est pas définie sur P tout entier, en particulier pas en z_0. Mais 2) n'implique pas 1) : a priori on pourrait penser que d'autres fonctions π (par exemple d'autres déterminations du logarithme complexe) pourraient résoudre la question $\pi^2 = f$ sur P.

Problème

1) soit $h(z) = \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Alors $h(z+2i\pi) = h(z)$.

On a $h(z) = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow z = ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = \lim_{z \to 0} \operatorname{ch} z = 1$, $\{0\}$ est zéro d'ordre 1. De même

$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sh}(i\pi + h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\operatorname{sh} h}{h} = -1$ donc $\{i\pi\}$ est zéro d'ordre 1 de h. Par périodicité tous les zéros de h sont d'ordre 1.

2) soit $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sh} z}$, définie et holomorphe en dehors des zéros de h càd pour $z \neq ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. les pôles de f sont les zéros de h et sont d'ordre 1 par 1). ~~les~~ résidu~~s~~ de f en $ik\pi$ est

$\lim_{h \to 0} \frac{h}{\operatorname{sh}(ik\pi + h)} = (-1)^k$ par 1).

le développement de Laurent de f en $\{0\}$ est de la forme

$\frac{1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \cdots$ puisque $f(z) = -f(-z)$ et le résidu de f en 0 est 1 pour un pôle d'ordre 1.

le rayon de convergence de la partie série entière est π car $f(z) - \frac{1}{z}$ est holomorphe en dehors de $\{ik\pi \mid |k| \geq 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

Calculons a_1 et a_3 : Pour $z \neq 0$ et $|z| < \pi$

$\frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + u(z)}$ avec $u(z) = 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

D'où $\frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{5!} + \frac{z^4}{36} + z^6 \varphi(z)\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + z^3\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120}\right) + z^5 \varphi$

où φ est analytique sur $D(0,\pi)$.

En particulier $\frac{1}{\operatorname{sh} z} - \frac{1}{z}$ se prolonge en fonction analytique en 0 où elle vaut 0.

3) Soit $g(z) = \frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z}$. Par 2) ses pôles sont les $ik\pi, k \in \mathbb{Z}$,

tous simples sauf $\{0\}$ qui est pôle d'ordre 3. Par 2)

$$g(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + z\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120}\right) + z^3 \varphi(z) \quad , |z| < \pi , z \neq 0$$

le résidu de g en $\{0\}$ est $-\frac{1}{6}$.

4) a) Par le théorème des résidus $I_R = \int_{\partial E_R} \frac{dz}{z^2 \operatorname{sh} z} = -\frac{1}{6} \cdot 2i\pi$

puisque le seul pôle à l'intérieur du rectangle est $\{0\}$.

b) $$\left| \int_{[d\,a]} \frac{dz}{z^2 \operatorname{sh} z} \right| = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{i\,dy}{(R+iy)^2 \operatorname{sh}(R+iy)} \right| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{(R^2+y^2)\operatorname{sh} R} \leq \frac{\pi}{R^2 \operatorname{sh} R}$$

puisque $|R+iy|^2 = R^2 + y^2$ et $|\operatorname{sh}(R+iy)| = \frac{|e^{R+iy} - e^{-R-iy}|}{2} \geq \frac{|e^{R+iy}| - |e^{-R}|}{2} = \operatorname{sh} R$

la même majoration vaut pour $\left| \int_{[b\,c]} \frac{dz}{z^2 \operatorname{sh} z} \right|$.

c) $$\int_{[a\,b] \cup [c\,d]} \frac{dz}{z^2 \operatorname{sh} z} = \int_{-R}^{R} \left(\frac{1}{(x-i\frac{\pi}{2})^2 \operatorname{sh}(x-i\frac{\pi}{2})} - \frac{1}{(x+i\frac{\pi}{2})^2 \operatorname{sh}(x+i\frac{\pi}{2})} \right) dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{-i \operatorname{ch} x} \left(\frac{1}{(x-i\frac{\pi}{2})^2} + \frac{1}{(x+i\frac{\pi}{2})^2} \right) = 2i \int_{-R}^{R} \frac{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}{(x^2+\frac{\pi^2}{4})^2 \operatorname{ch} x} dx$$

d) lorsque $R \to \infty$ a, b, c) entraînent

$$-\frac{\pi}{6} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}{(x^2+\frac{\pi^2}{4})^2 \operatorname{ch} x} dx = 2 \lim_{R \to \infty} \int_0^R$$ par parité de la

fonction à intégrer. Finalement $-\frac{\pi}{6} = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}{(x^2+\frac{\pi^2}{4})^2 \operatorname{ch} x} = \int_{-\infty}^{+\infty}$

à nouveau par la parité.