Université de Cergy-Pontoise - L3 - Parcours M-MP

Examen d'analyse complexe - Session 2 - 1 Juillet 2008

Durée: **2** heures

Exercice 1 :

1. Soit $f(z) = \dfrac{a}{z-a} + g(z)$, où g est une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ contenant a. Montrer que a est pôle simple de f et calculer le résidu de f en a.
2. Préciser les pôles et les résidus correspondants de la fonction $f(z) = \dfrac{a}{z-a} + \dfrac{b}{z-b}, a \neq b$.
3. Soit $a_n = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}$. On note $S = \{2^{-n}, n \geq 1\} \cup \{0\}$. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact disjoint de S.
   (a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|z-a| \geq \delta$ pour tous $z \in K, a \in S$.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{z-a_n}$ converge normalement sur K.
   (c) Montrer que $g(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{z-a_n}$ est holomorphe sur K, et sur $\mathbb{C}\backslash S$.
4. Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{z-a_n} = \frac{1}{z-1} + g(z), z \notin (S \cup \{a_0\})$.
   (a) Montrer que $a_0 = 1$ est un pôle de f et calculer le résidu correspondant.
   (b) Quels sont les pôles de f? Préciser les résidus correspondants.
   (c) Vérifier que 0 est un point de sigularité non isolé de f. f est-elle méromorphe sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{C}^*$?

Exercice 2 : Soit C le cercle centré à l'origine, de rayon 1, orienté dans le sens direct.

1. (a) Calculer $\displaystyle\int_C \frac{d\xi}{\xi^j}$, pour $j \geq 2$ et entier.
   (b) Soit z tel que $|z| < 1$. En faisant un developpement en série entière de $\left(1 - \dfrac{z}{\xi}\right)^{-1}$, montrer que $\displaystyle\int_C \frac{d\xi}{\xi^k(\xi - z)} = 0, k \geq 1$.
2. Soit f une fonction analytique sur un ouvert contenant le disque $\overline{D}$ où $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
   (a) Ecrire la formule de Cauchy donnant $f(z)$ pour $z \in D$, en fonction des valeurs de f sur le cercle C.
   (b) Préciser les coefficients du développement en série entière de f au voisinage de 0 et le rayon de cette série.
   (c) On définit f_n sur $D\backslash\{0\}$ par
   $$f(z) - f(0) - zf'(0) - .... - z^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} = z^n f_n(z).$$
   Montrer que f_n se prolonge en fonction analytique sur D. (Utiliser b).
3. En appliquant à f_n la formule de Cauchy de 2) et en utilisant 1), montrer que, pour $z \in D$,
$$2i\pi f_n(z) = \int_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi^n(\xi - z)}.$$