Université de Cergy - 2007-2008

Examen d'Analyse complexe (3h- 9 janvier 2008)

Exercice 1

On se propose de calculer par la méthode des résidus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+2x+2)}dx.$$

On considère le chemin fermé γ_R dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$ formé par le segment $[-R, R]$ sur l'axe réel et le demi-cercle C_R centré à l'origine, de rayon R, parcourus dans le sens trigonométrique. Soit $f(z) = \frac{e^{ix}}{(x^2+2x+2)}$.

a) Calculer les pôles de f et donner leur ordre de multiplicité (faire un dessin).

b) Calculer $\int_{\gamma_R} f(z)dz$.

c) Montrer que $\int_{C_R} f(z)dz \rightarrow_{R\rightarrow\infty} 0$.

d) En déduire la valeur de I.

Problème (les parties I et II sont indépendantes)

On note $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ et $B_{\frac{2}{3}}$ désigne la bande verticale $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq \frac{2}{3}\}$.

I) Pour $z \in \Omega$ on pose

$$g(z) = (\frac{\pi}{\sin \pi z})^2.$$

1) a) Vérifier que g est holomorphe sur Ω.

b) Montrer que $g(z) = g(z+1)$ pour $z \in \Omega$.

2) a) Montrer que $z = 0$ est un pôle de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$, préciser son ordre de multiplicité et son résidu.

b) En déduire que $\frac{\pi}{\sin \pi z} - \frac{1}{z}$ se prolonge en fonction analytique h dans un voisinage de $\{0\}$.

c) Montrer que $h(0) = 0$.

d) En écrivant $g(z) = (\frac{1}{z} + h(z))^2$ en déduire que $g(z) - \frac{1}{z^2}$ se prolonge en fonction holomorphe dans un voisinage de $\{0\}$ et dans $B_{\frac{2}{3}}$.

3) Montrer que $g(x) - \frac{1}{x^2} \rightarrow_{x\rightarrow 0} \frac{\pi^2}{3}$, x réel. (On pourra commencer par un DL à l'ordre 3 en zéro de $\frac{\sin \pi x}{\pi}$).

4) Montrer que $|\sin \pi z| \geq |sh(\pi \operatorname{Im} z)|, z \in \mathbb{C}$, puis que $|g(z)| \leq \frac{\pi^2}{sh^2 \pi}$ si $|\operatorname{Im} z| \geq 1$.

II) 1) a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge ponctuellement absolument sur Ω. On note $f(z)$ sa somme.

b) Montrer que $f(z) = f(z+1)$ pour tout $z \in \Omega$.

2) a) Montrer que la série $\sum\limits_{|n|\geq 1} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement dans $B_{\frac{2}{3}}$, et que sa somme $S(z)$ est bornée dans $B_{\frac{2}{3}}$.

b) En déduire que $S(z) = f(z) - \frac{1}{z^2} \to_{z\to 0} 2\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

0n rappelle pour la suite que $2\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$.

3) Montrer que $S(z)$ est holomorphe dans $B_{\frac{2}{3}}$. (Utiliser un théorème du cours).

III) 1) Montrer que $f-g$ se prolonge en fonction holomorphe dans $B_{\frac{2}{3}}$, nulle en $\{0\}$, notée $\widetilde{f-g}$.

2) Montrer que $\widetilde{f-g}$ est bornée sur $B_{\frac{2}{3}}$. (Considérer le rectangle $B_{\frac{2}{3}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| \leq 1\}$, puis majorer $|f|$ et $|g|$ sur $B_{\frac{2}{3}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| \geq 1\}$).

3) Vérifier que $(f-g)(z) = (f-g)(z+1)$ pour tout $z \in \Omega$. En déduire que $f-g$ se prolonge en fonction entière bornée, qu'on note encore $\widetilde{f-g}$.

4) Conclure que $\widetilde{f-g}$ est nulle sur $\mathbb{C}$, donc que $f = g$ sur Ω.