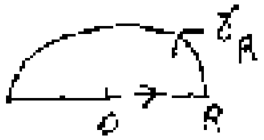
Université de Cergy - 2007-2008 - L3

SESSION 1

Corrigé de l'examen d'Analyse Complexe.

Exercice 1 :



Par le théorème des résidus

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z+1)^2+1}\,dz = 2i\pi\, \text{Rés}_f(-1+i)$$ où le résidu en $-1+i$ de $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+1)^2+1}$ (fonction holomorphe sur le $\frac{1}{2}$ plan $\text{Im} z \geq 0$ sauf au pôle d'ordre 1 $z = -1+i$) est $\lim\limits_{z \to -1+i} (z+1-i)f(z)$

$$= \lim_{z \to -1+i} \frac{e^{iz}}{z+1+i} = \frac{e^{i(-1+i)}}{2i} = e^{-(1+i)},$$ d'où $I_R = \pi e^{-(1+i)}$.

D'autre part $$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta}+1)^2+1}\, iRe^{i\theta}\,d\theta = J_R + H_R.$$

Or $$|H_R| \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin\theta}\,R\,d\theta}{(R-1)^2} \leq \frac{R}{(R-1)^2}\pi,$$ donc $H_R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

Finalement
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+2x+2} = \lim_{R\to\infty} J_R = \lim_{R\to\infty} I_R = \pi e^{-(1+i)}.$$

Problème.

I- 1 a) $g(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ car $\sin^2 \pi z$ est holomorphe sur Ω et ne s'y annule pas.

b) $\sin \pi(z+1) = \sin(\pi z + \pi) = -\sin \pi z$ donc $g(z+1) = g(z)$, $z \in \Omega$

2) les singularités de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ sont les zéros de $\sin \pi z$ càd $\{k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$\sin \pi z$ est analytique au voisinage de k et $\sin \pi z = (z-k)\, h(z)$ où h est analytique au voisinage de k et $h(k) = (\sin \pi z)'(k) = \pi \cos k\pi \neq 0$

Donc $z = k$ est zéro simple de $\sin \pi z$ - Alors $z = k$ est pôle simple de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$, son résidu est $\lim\limits_{z \to k} \frac{\pi(z-k)}{\sin \pi z} = \frac{\pi}{h(k)} = (-1)^k$.

En particulier le résidu en 0 de $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ est 1 ; par définition $\frac{\pi}{\sin \pi z} - \frac{1}{z}$ se prolonge en fonction h dans un voisinage de 0. En particulier $h(z) = -h(-z)$ si $z \neq 0$ et par continuité $h(0) = -h(0)$ d'où $h(0) = 0$

d) g étant holomorphe dans Ω, $g(z) - \frac{1}{z^2}$ est holomorphe dans $B_{2/3} - \{0\}$. D'après ce qui précède,

dans un voisinage de $\{0\}$, pour $z \neq 0$,

$$g(z) = \left(\frac{1}{z} + h(z)\right)^2 = \frac{1}{z^2} + h^2(z) + 2\frac{h(z)}{z}.$$

Comme h est analytique dans un voisinage de $\{0\}$ et nulle en $\{0\}$, on sait que $\frac{h(z)}{z}$ se prolonge en fonction analytique dans un voisinage de $\{0\}$. Donc $g(z) - \frac{1}{z^2} = h^2(z) + 2\frac{h(z)}{z}$ se prolonge en fonction analytique dans un voisinage de $\{0\}$. Finalement $g(z) - \frac{1}{z^2}$ se prolonge en fonction holomorphe sur $B_{2/3}$.

3) On a $\dfrac{\sin \pi x}{\pi} = x - \dfrac{\pi^2 x^3}{6} + o(x^3) = x\left(1 - \dfrac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)\right)$

D'où $\left(\dfrac{\sin \pi x}{\pi}\right)^2 = x^2\left(1 - \dfrac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)\right)$ et

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)\right).$$

Donc $g(x) - \dfrac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{3}$

4) $|\sin \pi z| = \dfrac{1}{2}\left|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right| \geq \dfrac{1}{2}\left|\,|e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|\,\right| = \dfrac{1}{2}\left|e^{-\pi \operatorname{Im} z} - e^{\pi \operatorname{Im} z}\right|$

$= |\operatorname{sh} \pi(\operatorname{Im} z)| \geq \operatorname{sh} \pi$ si $|\operatorname{Im} z| \geq 1$.

Donc $|g(z)| \leq \dfrac{\pi^2}{\operatorname{sh}^2 \pi}$ si $|\operatorname{Im} z| \geq 1$.

II 1 a) $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{|z|^2} + \sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{|z-n|^2}$, pour $z \in \Omega$.

Comme $\dfrac{1}{|z-n|^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ lorsque $|n| \to \infty$ et comme $\displaystyle\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge,

la série $\displaystyle\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{|z-n|^2}$ converge sur Ω. Ainsi $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge sur Ω.

On note $f(z)$ sa somme.

b) $\displaystyle f(z+1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+1-n)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-(n-1))^2} = f(z)$.

2 a) $\displaystyle\sup_{z \in B_{2/3}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sup_{z \in B_{2/3}} \frac{1}{(\operatorname{Re}(z-n))^2} \leq \frac{1}{\left(|n| - \frac{2}{3}\right)^2}$, $|n| \geq 1$.

Comme $\displaystyle\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{\left(|n| - \frac{2}{3}\right)^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge

normalement sur $B_{2/3}$. Sa somme est bornée par $\displaystyle\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{\left(|n| - \frac{2}{3}\right)^2} = M$

b) Comme $z \mapsto \dfrac{1}{(z-n)^2}$ est continue $(|n| \geq 1)$, la convergence normale implique la continuité de la somme $\sum_{|n|\geq 1} \frac{1}{(z-n)^2} = f(z) - \frac{1}{z^2}$ sur $B_{2/3}$, en particulier en $\{0\}$. Càd

$$S(z) = f(z) - \frac{1}{z^2} \underset{z \to 0}{\longrightarrow} S(0) = \sum_{|n|\geq 1} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

3) Par un théorème du cours, une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur $B_{2/3}$ a une limite holomorphe sur $B_{2/3}$. On applique ceci à la suite des sommes partielles $\sum_{|n|=1}^{|n|=N} \frac{1}{(z-n)^2}$, qui converge vers $S(z)$, uniformément sur $B_{2/3}$. Donc $S(z) = f(z) - \frac{1}{z^2}$ est holomorphe sur $B_{2/3}$.

II 1) $f - g = f - \frac{1}{z^2} - \left(g - \frac{1}{z^2}\right)$ se prolonge en fonction holomorphe $\widetilde{f-g}$ dans $B_{2/3}$ par I 2 d) et II 3). Par II 2 b) et I 3)

$$f(z) - \frac{1}{z^2} - \left(g(z) - \frac{1}{z^2}\right) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} 0 = \widetilde{f-g}(0).$$

2) $\widetilde{f-g}$ est holomorphe donc continue sur $B_{2/3}$ donc bornée sur le compact $B_{2/3} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq 1 \}$. Sur $B_{2/3} \cap \{|\operatorname{Im} z| \geq 1\}$

$$|f - g| \leq |f| + |g| \leq \frac{\pi^2}{sh^2 \pi} + |S| + \frac{1}{|z|^2} \leq \frac{\pi^2}{sh^2 \pi} + M + 1 \quad \text{par}$$

I 4) et II 2 a). Finalement $\widetilde{f-g}$ est bornée sur $B_{2/3}$.

3) Par I 1 b) et II 1 b) $(f-g)(z) = (f-g)(z+1)$ sur Ω.
Comme $f-g$ se prolonge en $\widetilde{f-g}$ holomorphe bornée sur $B_{2/3}$, elle se prolonge aussi en fonction holomorphe bornée sur $B_{2/3} - 1$ donc sur $B_{2/3} - 1$ et finalement sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_{2/3} + k = \mathbb{C}$.
Par le théorème de Liouville, $\widetilde{f-g}$ est constante sur $\mathbb{C}$, nulle en $\{0\}$, donc nulle.