Troisième année de licence - Parcours M-MP

Examen d'analyse complexe - 2ème Session - 22 Juin 2007

Durée: **2** heures

Exercice 1 :

Soient f, g deux fonctions entières telles que $|f| \leq |g|$ sur $\mathbb{C}$.
a) Soit a un zéro de g d'ordre $p \geq 1$. Montrer que a est un zéro de f d' ordre de multiplicité $\geq p$. (Considérer $f(z)/(z-a)^{p-1}$).
b) Montrer qu'on peut prolonger $\frac{f}{g}$ en fonction analytique dans un voisinage de a, puis en fonction entière.
c) Montrer que $f = \lambda g$ sur $\mathbb{C}$, où λ est une constante.

Exercice 2 :

On fixe un réel c tel que $0 < c < 1$. On note "Lg" la détermination du logarithme définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ par

$$\mathrm{Lg}\,(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta, \quad r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi.$$

Soit z^c la fonction $z \mapsto \exp(c\,\mathrm{Lg}\,z)$. Sur $\Omega \setminus \{-1\}$ on pose

$$f(z) = \frac{1}{z^c(1+z)}.$$

On prolonge f sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}$ en posant $f(x) = \dfrac{1}{x^c(1+x)}, x > 0.$

1.a) Calculer z^c en $z = -1$.
1.b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathrm{Lg}\,(x + i\alpha)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathrm{Lg}\,(x - i\alpha)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} (x + i\alpha)^c$ et $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} (x - i\alpha)^c$ pour $x > 0$.
2) Soit γ_ρ le cercle centré à l'origine, de rayon ρ, parcouru dans le sens trigonométrique. Pour $0 < \alpha < \rho$ soit $\gamma_{\alpha,\rho}$ la portion de ce cercle d'origine le point A_ρ d'affixe $\sqrt{\rho^2 - \alpha^2} + i\alpha$, d'extrémité B_ρ d'affixe $\sqrt{\rho^2 - \alpha^2} - i\alpha$. Montrer que

$$\left| \int_{\gamma_{\alpha,\rho}} f(z)dz \right| \leq 2\pi \frac{\rho^{1-c}}{|1-\rho|}.$$

3) Soient $0 < \alpha \leq \frac{r}{2} < r < 1 < R$. Soit $\Gamma_{\alpha,r,R}$ le chemin fermé parcouru dans le sens direct formé par les deux portions de cercles $\gamma_{\alpha,r}$ et $\gamma_{\alpha,R}$ et les segments de droites $\{\sqrt{r^2 - \alpha^2} \leq \mathfrak{Re}\, z \leq \sqrt{R^2 - \alpha^2}, \mathfrak{Im}\, z = \pm\alpha, \}$. Calculer $\int_{\Gamma_{\alpha,r,R}} f(z)dz$. (On précisera le théorème utilisé).
4.a) Montrer que $|f| \leq (\frac{2}{r})^c$ sur le rectangle $S = \{\frac{r}{2} \leq \mathfrak{Re}\, z \leq R, |\mathfrak{Im}\, z| \leq 1\}$.
4.b) En déduire que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{\sqrt{r^2-\alpha^2}}^{\sqrt{R^2-\alpha^2}} f(x + i\alpha)dx = \int_r^R f(x)dx = e^{2i\pi c} \lim_{\alpha \to 0^+} \int_{\sqrt{r^2-\alpha^2}}^{\sqrt{R^2-\alpha^2}} f(x - i\alpha)dx.$$

(On pourra, en le justifiant, utiliser le théorème de convergence dominée).
5) Conclure que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^c(1+x)}dx = \frac{\pi}{\sin \pi c}.$$