Troisième année de licence
Parcours M-MP

Examen d'analyse complexe, 20 Decembre 2006

Durée: **3** heures

Exercice :

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert convexe (donc connexe). On rappelle que $f : U \to \mathbb{C}$ est harmonique si $\phi(x,y) = f(x+iy)$ est de classe C^2 et $\Delta\phi = 0$. On rappelle aussi qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si elle est la partie réelle d'une fonction holomorphe F.

1. (a) Soit $F : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Montrer que la fonction $f = \mathfrak{Re}\, F$ vérifie la propriété de la moyenne sur U.
   (b) En déduire que toute fonction harmonique sur U (à valeurs dans $\mathbb{C}$) vérifie la propriété de moyenne sur U.
2. Montrer que toute fonction harmonique $f : U \to \mathbb{R}$ vérifie le principe de minimum : si f admet un minimum local en $a \in U$ alors f est constante sur un voisinage de a.
3. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique et constante sur un voisinage $V_a \subset U$ où $a \in U$.
   (a) Montrer que les conjuguées harmoniques de f sont constantes sur V_a.
   (b) En déduire que f est constante sur U.
4. On suppose en outre que U est borné. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique sur U et continue sur $\overline{U}$. Montrer que f atteint son minimum sur $\overline{U}$ et que $\min_{z\in\overline{U}} f(z) = \min_{z\in\partial U} f(z)$.
5. Soit $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $G(z) = \mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{\overline{z}}$. Soit $f = \frac{1}{2}|G|$.
   (a) G est-elle holomorphe ?
   (b) f est-elle harmonique ?
   (c) Donner une conjuguée harmonique de f sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Im}\, z \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$.
   (d) Calculer le minimum de f sur le triangle rectangle de sommets $i\frac{\pi}{4}$, $1 + i\frac{\pi}{2}$ et $i\frac{\pi}{2}$.

Problème :

(*Les parties II et III sont indépendantes*)

I. Partie théorique

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient g, h des fonctions holomorphes non identiquement nulles sur U.

1. Soit $a \in U$ un zéro d'ordre k de g. Montrer qu'il existe un voisinage V de a, $V \subset U$, sur lequel g s'ecrit $g(z) = (z-a)^k \tilde{g}(z)$ où $\tilde{g}$ est une fonction qui ne s'annule pas sur V. Préciser la nature de $\tilde{g}$.
2. Supposons que $a \in U$ est un zéro d'ordre k à la fois de g et de h. Quelle est la nature de la singularité a de la fonction $f = \dfrac{g}{h}$?
3. Soit $a \in U$ un zéro d'ordre 1 de h tel que $g(a) \neq 0$. Montrer que le résidu $\mathrm{Res}\big(\frac{g}{h}; a\big)$ vaut $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.
4. Soit maintenant $a \in U$ un zéro d'ordre 2 de h tel que $g(a) \neq 0$. Montrer alors que

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{g}{h}; a\Big) = 2\,\frac{g'(a)}{h''(a)} - \frac{2}{3}\cdot\frac{g(a)h'''(a)}{(h''(a))^2}.$$

Tourner la page, SVP

II. Application

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \dfrac{z^2(2\pi - z)}{1 - \cos z}$.

1. Trouver les zéros de la fonction $h(z) = 1 - \cos z$ et leur ordre de multiplicité.
2. Soit D le disque de centre i et de rayon 7. Préciser la nature de chacune des singularités de f se trouvant dans D (effaçable, pôle d'ordre fini, ou essentielle ?). Faire un dessin.
3. On note ∂D la frontière de D. Ecrire le théorème des résidus pour $J = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, où le chemin γ est ∂D parcouru une fois dans le sens direct.
4. En déduire la valeur de J à l'aide des résultats de la partie (I).

III. Application

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité $\overline{D}$ centré en 0 et fermé. Soit γ le chemin parcouru une fois dans le sens direct, dont l'image est $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

1. Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur U, ne s'annulant pas sur ∂D.
   (a) Soit $a \in U$ un zéro d'ordre k de f. Déduire de (I.1) une expression de $\dfrac{f'}{f}$ sur $V \backslash \{a\}$, où $V \subset U$ est un voisinage de a à préciser.
   (b) Calculer Res$\left(\frac{f'}{f}; a\right)$.
   (c) Calculer $I = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$. (Considérer les zéros de f dans D).
   (d) Que vaut I dans le cas particulier $f(z) = z$?
2. Soit F une fonction holomorphe sur U, telle que $|F(z)| < 1$ sur ∂D.
   On pose $f_t(z) = z - tF(z)$, pour $z \in U$, $0 \leq t \leq 1$ et
   $$N(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,\mathrm{d}z.$$
   (a) Montrer que N est une fonction définie et continue sur $[0, 1]$. (On pourra paramétrer le cercle ∂D).
   (b) En déduire que N est une fonction constante sur $[0, 1]$, puis, en utilisant (III.1.d) montrer que $N = 1$.
   (c) Conclure que F admet sur D un unique point fixe z_0 (c'est à dire tel que $z_0 - F(z_0) = 0$).