Licence L3 - 2005/2006
Parcours Mathématiques

Examen d'Analyse Complexe - Deuxième session : 7 juillet 2006

Durée : **2 heures**

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2 + |z|^2 - \overline{z}^2 + 2z - \overline{z}$. On se propose de trouver les points $z \in \mathbb{C}$ où la fonction f est dérivable.

1. Calculer les fonctions $u \equiv \mathfrak{Re}\, f$ et $v \equiv \mathfrak{Im}\, f$.
2. Ecrire les conditions de Cauchy-Riemann pour f et trouver l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ où elles sont vérifiées.
3. Conclure, en trouvant les points de $\mathbb{C}$ où f est dérivable.

Exercice 2: Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$.

1. La fonction u est-elle harmonique ?
2. Trouver la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\mathfrak{Re}\, f = u$ et $f(i\pi) = i - 1$.

Exercice 3: Calcul d'une intégrale de chemin :

1. Soit γ le chemin parcouru en sens direct, défini par $\gamma(t) = \exp\left(i\ \frac{(2t-1)\pi}{2}\right)$, $t \in [0, 1]$. Dessiner ce chemin dans le plan complexe.
2. Calculer $I = \int_\gamma \log z \,\mathrm{d}z$ où "log" désigne la détermination principale du logarithme.

Exercice 4: Soit la fonction complexe f donnée par $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{z-1} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{(\sin z + \cos z)(z-3)^3}$, pour les $z \in \mathbb{C}$ où l'expression est bien définie.

1. Montrer qu'il existe une fonction complexe ϕ telle que $\sin z + \cos z = \cos(\phi(z))$ (calculer ϕ explicitement).
2. Trouver les points singuliers de f.
3. Etudier la nature de ces points singuliers (i.e. s'il s'agit de singularités isolées et si elles sont effaçables ou des pôles ou des singularités essentielles).
4. Developper f en série de Laurent autour de $z_0 = 3$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{z-4}{z-3} f(z)\,\mathrm{d}z$, où γ parcourt une fois en sens direct le contour $\partial D(3; 1)$ (frontière du disque unité centre en 3).

(Indication : on pourra répondre à la questions 2 en s'appuyant sur les questions 1 et 4)

— **Tournez la page** —>

Exercice 5: Soit $D(0;1)$ le disque unité (ouvert) de centre 0 dans le plan complexe. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que :

a. f est *holomorphe* sur $D(0;1)$,

b. f est *bornée* sur $D(0;1)$ (on peut prendre $|f| \leq 1$),

c. f est *continue* sur $\overline{D(0;1)}$ (fermeture de $D(0;1)$),

d. $f(0) \neq 0$.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des zéros de f qui se trouvent dans $D(0;1)$, numérotés de sorte qu'un zéro de f apparaît dans la suite autant de fois que son ordre de multiplicité.
On se propose de montrer que le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$ converge.

1. Soit $B_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}$.
   (a) Montrer que $|B_n(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial D(0;1)$.
   (b) Justifier l'holomorphie de la fonction B_n sur $D(0;1)$.
2. Appliquer le principe du maximum à la fonction $g_n = \frac{f}{B_n}$ afin de prover que pour tout $z \in D(0;1)$ on a $|f(z)| \leq |B_n(z)|$.
3. Particulariser cette inégalité pour $z = 0$.
4. Vérifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $a_n \equiv \prod_{k=0}^{n} |\alpha_k|$ est monotone.
5. Déduire des deux questions précédentes la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite $a \in]0,1[$ quand $n \to \infty$.