Troisième année de licence
Parcours M
Barème indicatif : 5+9+9

Examen d'analyse complexe, 17 Mai 2006

Durée: **3** heures

Exercice 1 : On note D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{C}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$, ainsi que sa somme g sur son disque de convergence.
2. Montrer qu'il existe un unique prolongement analytique de g sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, que l'on note $\widetilde{g}$. Calculer $\widetilde{g}(2)$.
3. Montrer, qu'il existe une unique fonction analytique f sur D telle que
$$f\big(\frac{1}{n}\big) = \frac{n^2}{(n-1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
On déterminera une formule pour f.

Exercice 2 : On note Lg la fonction logarithme suivante et $\mathcal{R}$ la fonction racine carrée définies sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-, \quad \mathrm{Lg}\,(z) = \ln|z| + i \arg_{]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Lg}\, z\right).$$

On fera attention au fait que Lg n'est pas le logarithme principal, et $\mathcal{R}$ n'est pas la racine carrée principale.

1. Calculer $\mathrm{Lg}\,(-2)$, $\mathrm{Lg}\, i$, $\mathcal{R}(i)$ et $\mathcal{R}(-2)$.
2. On pose $f(z) = \dfrac{\mathrm{Lg}\, z}{\mathcal{R}(z)\,(1+z^2)}$; sur quel ouvert maximal U de $\mathbb{C}$ cette formule définit-elle une fonction holomorphe ?
3. Pour tout $0 < r < 1$ et $1 < T$, on définit le chemin γ situé dans le demi plan supérieur $\Im z \geq 0$ qui parcourt une fois dans le sens trigonométrique la courbe constituée par le demi cercle γ_1^* de centre 0 et de rayon T, le segment $\gamma_2^* : [-T, -r]$, le demi cercle γ_3^* de centre 0 et de rayon r, et enfin le segment $\gamma_4^* : [r, T]$. Représenter γ^*.
4. Calculer $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.
5. Paramétrer $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4.
6. On pose $I_3(r) = \displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z$, montrer que $|I_3(r)| \leq \pi\sqrt{r}\dfrac{\pi - \ln r}{1-r^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{r\to 0} I_3(r)$.
7. On pose $I_1(T) = \displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$, montrer que $\displaystyle\lim_{T\to\infty} I_1(T) = 0$.
8. En considérant la partie imaginaire de $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, en déduire que
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}.$$

TSVP

Exercice 3 : Soit un réel $a \geq \frac{1}{2}$ et soit $U = \{z \in \mathbb{C}^*,\ |Arg z| < \frac{\pi}{2a}\}$.

Soit **0<*c*<*a***. On définit la fonction z^c sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ par $z^c = e^{c\mathrm{Log}\, z}$, où Log z désigne la détermination principale du logarithme. On pose, pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ et $\alpha > 0$,

$$\varphi(z) = e^{-z^c},\ \varphi_\alpha(z) = e^{-\alpha z^c} \text{ et } \varphi(0) = \varphi_\alpha(0) = 1.$$

1) a) Montrer que φ et φ_α sont holomorphes et sans zeros sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

b) Représenter U. Soit $z \in U$, calculer $\mathrm{Re}(z^c)$, montrer que $\mathrm{Re}(z^c) \geq |z|^c \cos\left(\frac{c\pi}{2a}\right) > 0$.

c) Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-,\ |z^c| = |z|^c$, en déduire que φ et φ_α sont continues en 0.

d) Montrer que $\forall z \in U,\ |\varphi(z)| \leq 1$ et que $\sup_{|z|=r, z\in U} |\varphi(z)| \to_{r\to\infty} 0$.

e) Vérifier que $|\varphi_\alpha(z)| = |\varphi(z)|^\alpha$.

2) Soient f une fonction holomorphe sur U, continue sur $\overline{U}$, et M un réel tels que :

(i) $|f(z)| \leq M$ sur le bord de U, c'est à dire si $z = 0$ ou si $|Arg z| = \frac{\pi}{2a}$.

(ii) $\forall z \in U,\quad |f(z)| \leq e^{|z|^b}$ où $b \in]0; a[$ est fixé.

On fixe $c \in]b, a[$ et on pose, pour $z \in \overline{U}$ et φ_α définie comme en 1),

$$F_\alpha(z) = f(z)\varphi_\alpha(z)$$

a) Montrer que $\sup_{|z|=r, z\in U} |F_\alpha(z)| \to_{r\to\infty} 0$. En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\sup_{z\in U, |z|\geq R} |F_\alpha(z)| \leq M.$$

b) Soit $T = \{z \in U, |z| \leq R\}$. Montrer que

$$\sup_{z\in\partial T} |F_\alpha(z)| \leq M.$$

En déduire que $|F_\alpha| \leq M$ sur U.

c) En déduire, pour $z \in U$, une majoration de $|f(z)|$, puis, en considérant $\alpha \to 0$, conclure que $|f| \leq M$ sur U.

3) Montrer que la fonction $f(z) = e^{z^a}$ est bornée sur le bord de U, mais pas sur U.