

## Reponses à l'Examen d'Analyse Complexe - Deuxième session

**Exercice 1:** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z^2 + |z|^2 - \bar{z}^2 + 2z - \bar{z}$ . On se propose de trouver les points  $z \in \mathbb{C}$  où la fonction  $f$  est dérivable.

1. Trouver les fonctions  $u \equiv \Re f$  et  $v \equiv \Im f$ .
2. Ecrire les conditions de Cauchy-Riemann pour  $f$  et trouver l'ensemble de points de  $\mathbb{C}$  où elles sont vérifiées.
3. Conclure, en trouvant les points de  $\mathbb{C}$  où  $f$  est dérivable.

**Réponse :**  $z = -1$  est le seul point qui satisfait aux quest. 2 et 3.

**Exercice 2:** Soit  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $u(x, y) = e^x \cos y$ .

1. La fonction  $u$ , est-elle harmonique ?
2. Trouver la fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\Re f = u$  et  $f(i\pi) = i - 1$ .

**Réponse :** 2)  $v(x, y) = e^x \sin y + C$

3)  $f(z) = e^z + iC$  et avec la condition donnée :  $C = 1$ .

**Exercice 3:** Calcul d'une intégrale de chemin :

1. Soit  $\gamma$  le chemin parcouru en sens direct, défini par  $\gamma(t) = \exp\left(i \frac{(2t-1)\pi}{2}\right)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Dessiner ce chemin dans le plan complexe.
2. Calculer  $I = \int_{\gamma} \log z \, dz$  où "log" désigne la détermination principale du logarithme.

**Réponse :** 2)  $I = i\pi$ .

**Exercice 4:** Soit la fonction complexe  $f$  donnée par  $f(z) = \frac{e^{z-1} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{(\sin z + \cos z)(z-3)^3}$ , pour les  $z$  pour lesquels l'expression est bien définie.

1. Montrer qu'il existe une fonction complexe  $\phi$  telle que  $\sin z + \cos z = \cos(\phi(z))$  (trouver  $\phi$  explicitement).

**Réponse :**  $\phi(z) = z - \frac{\pi}{4}$ .

2. Trouver les points singuliers de  $f$ .

**Réponse :** Ce sont les racines de  $\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$ , i.e.  $-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$ , et  $z = 3$ .

3. Etudier la nature de ces points singuliers (i.e. s'il s'agit de singularités isolées et si elles sont effaçables ou des pôles ou des singularités essentielles).

**Réponse :** Les premiers effaçables,  $z = 3$  est pôle (ordre 3).

4. Développer  $f$  en série de Laurent autour de  $z_0 = 3$ .

5. En déduire la valeur de l'intégrale  $I = \int_{\gamma} \frac{z-4}{z-3} f(z) \, dz$ , où  $\gamma$  parcourt une fois en sens direct le contour  $\partial D(3; 1)$  (frontière du disque unité centre en 3).

**Réponse :**  $\frac{z-4}{z-3} f(z) = f(z) - \frac{f(z)}{z-3}$ , donc  $I = \text{Res}(f; 3) - \text{Res}\left(\frac{f}{z-3}; 3\right) = \dots = \frac{e^2}{4}(1-1/3) = \frac{e^2}{6}$   
... si je ne m'abuse...

(Indication : on pourra répondre à la questions 2 en s'appuyant sur les questions 1 et 4)

**Exercice 5:** Soit dans le plan complexe  $D(0; 1)$  le disque unité (ouvert) de centre 0. Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction telle que :

- a.  $f$  est holomorphe sur  $D(0; 1)$ ,
- b.  $f$  est bornée sur  $D(0; 1)$  (on peut prendre  $|f| \leq 1$ ),
- c.  $f$  est continue sur  $\overline{D(0; 1)}$  (fermeture de  $D(0; 1)$ ),
- d.  $f(0) \neq 0$ .

Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des zéros de  $f$  qui se trouvent dans  $D(0; 1)$ , de sorte que dans cette suite un tel zéro de  $f$  apparaît autant de fois que son ordre de multiplicité.

On se propose de montrer que le produit  $\prod_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$  est convergent vers un nombre appartenant à  $]0, 1[$ .

1. Soit  $B_n(z) = \prod_{k=0}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z}$ .

- (a) Montrer que  $|B_n(z)| = 1$  pour chaque  $z \in \partial D(0; 1)$ .
- (b) Justifier l'holomorphie sur  $D(0; 1)$  de la fonction  $B_n$ .
2. Appliquer le principe du maximum à la fonction  $g_n = f/B_n$  afin de prouver que pour tout  $z \in D(0; 1)$  on a  $|f(z)| \leq |B_n(z)|$ .
3. Particulariser cette inégalité pour  $z = 0$ .
4. En déduire que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général  $a_n \equiv \prod_{k=0}^n |\alpha_k|$  est monotone.
5. Déduire des deux questions précédentes la convergence de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers une limite  $a \in ]0, 1[$  quand  $n \rightarrow \infty$ .