CY Cergy Paris Université Mardi 15 Décembre 2025
L3 Mathématiques

**Examen Session 1 de Théorie de la mesure et de l'intégration**

– Durée 3 heures. Documents, calculatrices, et objets connectés strictement interdits –

**Exercice 1**. (Questions en vrac)

1. Soit $(f_n)$ une suite de fonctions définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, mesurables. Montrer que si $f_n \longrightarrow f\ \mu-p.p.$ et $f_n \longrightarrow f'\ \mu-p.p.$, alors les fonctions $f$ et $f'$ sont égales $\mu$-p.p. ?
2. Soit $\rho \in ]0,1[$. On considère sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ la mesure définie par $\mu(A) = \sum_{i \in A \cap \mathbb{N}^*} \rho(1-\rho)^{i-1}$.

   a) Calculer $\mu(\Omega)$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mu(\{1, \ldots, n\})$ et $\mu(\{n, n+1, \ldots\})$.

   b) Quels sont les ensembles de mesures nulle ?
3. a) Soit

$$f: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) \\ x & \mapsto & (f_1(x), f_2(x)) \end{array}$$

   Montrer que si $f$ est une fonction mesurable. Alors $f_1$ et $f_2$ sont mesurables.
4. (a) Dessiner le domaine $D$ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y \leq x^2, \quad xy \geq 1\right\}$$

   (b) Pour la fonction $f$ définie par $f(x,y) = x^2 y$, calculer en justifiant les calculs :

$$\int_D f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) \qquad \text{puis} \qquad \int_D f(x,y)\, d\mu(x,y)$$

   où $\lambda_2$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mu = \lambda \otimes \delta_1$ le produit de $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\delta_1$ la mesure de Dirac au point 1.

**Exercice 2**. On souhaite étudier la limite éventuelle de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donnée par

$$w_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(\pi x)}{1 + x^{n+2}} d\lambda(x) \qquad \text{où } \lambda \text{ est la mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n = \dfrac{\sin(\pi x)}{1 + x^{n+2}}$ est borélienne.
2. On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge $\lambda$-presque partout vers une fonction $f$ qu'on déterminera.
3. La suite $(w_n)$ admet-elle une limite ? Si oui, la calculer en justifiant les étapes du calcul.

(Aide : on peut, si on le souhaite, utiliser la décomposition : $f_n = f_n \mathbb{1}_{[0,1[} + f_n \mathbb{1}_{[1,+\infty[}$)

**Exercice 3**. Pour $t \in [0, +\infty[$ et $x \in ]0, +\infty[$, on note

$$f(x,t) = \frac{1 - e^{-tx}}{x} e^{-x} \quad \text{et} \quad F(t) = \int_{[0,+\infty[} f(x,t)\, d\lambda(x)\ .$$

où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x,t)}{e^{-x}} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x,t) = t$.

   b) En déduire que $F(t)$ est bien défini pour $t \geq 0$. Que vaut $F(0)$ ?

2. Soit $M > 0$ un réel positif quelconque.

   a- Vérifier que pour tout $t \in [0, M]$ on a : $\quad 0 \leq f(x,t) \leq f(x,M)$.

   b- Montrer que la fonction $F$ est continue sur $[0, M]$.

   c- La fonction $F$ est-elle continue sur $[0, +\infty[$ ?

3. Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall t \geq 0,\ F'(t) = \frac{1}{t+1}$.

   En déduire une expression simple de $F(t)$.

**Exercice 4**. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne de carré intégrable, i.e. $f \in L^2([0,1])$.

(a) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$\int_{[0,1]} x^n |f(x)| d\lambda(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \|f\|_{L^2}.$$

(b) A t-on $\int_{[0,1]} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} |f(x)| \right) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{x^n}{n} |f(x)| d\lambda(x)$ ? Justifiez votre réponse.

(c) Montrer que :

$$\int_{[0,1]} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} |f(x)| \right) d\lambda(x) < +\infty$$

(d) **Bonus** : En déduire la formule :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{x^n}{n} f(x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f(x) \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) d\lambda(x)$$