CY Cergy Paris Université — Mardi 17 Décembre 2024

L3 Mathématiques

Examen Session 1 de Théorie de la mesure et de l'intégration

– Durée 3 heures. Documents, calculatrices, et objets connectés strictement interdits –

Question de cours

Montrer qu'une tribu est stable par les opérations suivantes :

- Intersection dénombrable

- Limite supérieure et limite inférieure

Exercice 1. (Questions en vrac)

1. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure de probabilité. On note
$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{E} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$
Démontrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur E.

2. Déterminer les ensembles suivants :
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] ;\ B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[;\ C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[;\ D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[k - \frac{1}{n}, k + \frac{1}{n}\right[$$

3. Pour $f \in L^2([0,1], \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, montrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité :
$$\int_{[0,1]} x^n |f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \|f\|_{L^2}.$$
puis montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} |f(x)| \right) dx < \infty$.
Bonus : en déduire la formule :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} f(x) dx = \int_0^1 f(x) \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$$

4. (a) Dessiner, puis calculer l'aire du domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq \frac{1}{2}, \quad y \geq x^2, \quad xy \leq 1 \right\}$$
(b) Pour la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 y$, calculer
$$\int_D f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) \qquad \text{puis} \qquad \int_D f(x,y)\, d\mu(x,y)$$
où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mu = \lambda \otimes \delta_{1/2}$ le produit de λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\delta_{1/2}$ la mesure de Dirac au point $1/2$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x\,(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}*$, la foction f_n est borélienne.
2. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge λ-presque partout vers une fonction f qu'on déterminera.
3. Calculer $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$.

Exercice 3. On considère la fonction F définie par

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2tx)dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) + 2tF(t) = 0$.
3. (a) En faisant le changement de variables en coordonnées polaires

$$(x, y) = \phi(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$$

calculer

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy.$$

(b) En déduire $F(0)$.

(c) En déduire une expression simple de F.