CY Cergy Paris Université — Jeudi 21 Décembre 2023

L3 de Mathématiques

Examen de Théorie de la mesure et de l'intégration

– Durée 3 heures. Documents, calculatrices, et objets connectés strictement interdits –

Questions de cours.

1) Montrer que si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante dans une tribu $\mathcal{F}$ d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

$$\mu(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{\to +\infty} \mu(A_n)$$

2) Rappeler l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Minkowsky.

3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ vers l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

a) Montrer que les ensembles suivants appartiennent à $\mathcal{A}$:

$$A = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(\omega) \geq 1\} \qquad B = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \exists n \in \mathbb{N},\ f_n(\omega) \leq 1\}$$

b) Les ensembles suivants appartiennent-ils à $\mathcal{A}$? Justifiez vos réponses :

$C = \{\omega \in \Omega$ tel que $f_n(\omega) \geq 1$ à partir d'un certain rang$\}$

$D = \{\omega \in \Omega$ tel que $f_n(\omega) \geq 1$ pour une infinité d'indices $n\}$

Exercice 1. (Questions en vrac)

1. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une fonction $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mesurable telle que $f = g|f|$.
2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.
   Donner toutes les valeurs de $p \geq 1$ pour lesquelles $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et calculer $\| f \|_p$ dans ce cas.
3. Sur $\mathbb{R}$, on considère λ la mesure de Lebesgue et μ la mesure définie par $\mu = \delta_1 + 2\delta_2$. On pose $\nu = \lambda \otimes \mu$. Calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}\nu$ lorsque $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+1}$.

Exercice 2. Soit $\alpha > 2$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

1. Calculer de deux façons l'intégrale :

$$\int_{]1,+\infty[^2} (x+y)^{-\alpha} d\lambda_2(x,y)$$

a) à l'aide du théorème de Fubini.

b) à l'aide du changement de variables $(x,y) \to (x+y, y)$.

2. Soit $\beta > 1$. Calculer en utilisant les coordonnées polaires l'intégrale

$$\int_{]0,+\infty[^2} (1 + x^2 + y^2)^{-\beta} d\lambda_2(x,y).$$

Exercice 3. On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3. Déterminer $F(0)$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

4. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ (on commencera par le montrer sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$) et démontrer que

$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

5. En intégrant F' sur $]0, +\infty\,[$ et en utilisant les résultats de la question 3. montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(coup de pouce : on pourra être amené à utiliser le changement de variable $v = \sqrt{x}$)