Université de Cergy-Pontoise — Mercredi 14 Décembre 2022

L3 - Mathématiques

Examen de "Théorie de la mesure et de l'intégration"

– Durée 3 heures. Documents, calculatrices, et objets connectés strictement interdits –

Questions de cours.

1. Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Rappeler la définition de $A = \limsup_{n\to+\infty} A_n$. et montrer que $A \in \mathcal{T}$.
2. Si $(u_n)_n$ est une suite réelle. Donner les définitions de $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ et de $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ puis expliquer pourquoi elles existent toujours et pourquoi $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 1. **Questions en vrac**

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Expliciter $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1}\left[0, 1+\frac{1}{n}\right[$, $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1}\left]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$, $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left[1+\frac{1}{n}, 2\right[$, $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}\left]1+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right]$
2. On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}$
   (a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Rappeler le théorème de convergence dominée puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,+\infty[}\frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}dx.$
3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que si f et g sont deux fonctions réelles mesurables sur Ω et que $\|\ .\ \|_p$ désigne la norme de l'espace L^p, alors
$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_{\frac{3}{2}} \cdot \| g \|_3 .$$

Exercice 2. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ et en particulier $f'(0)$.
4. Prouver que f satisfait l'équation différentielle $2y' + xy = 0$. Résoudre cette équation.
5. Sachant $f(0) = \sqrt{\pi}$, montrer que $f(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$.

Exercice 3. On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

A- Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$.

1. Dessiner T, et par des considérations graphiques donner $\lambda_2(T)$, l'aire de T.
2. On pose
$$f(x,y) = (1-x)y\,\mathbb{1}_T(x,y).$$
   Sans calcul d'intégrale, la fonction f est-elle : positive ? bornée ? dans $L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \lambda_2)$?
3. Calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda_2$ en justifiant les étapes du calcul.
4. En écrivant $f(x,y) = f(x,y) \times \mathbb{1}_T(x,y)$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que
$$\| f \|_2 \geq \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

B- Soit D le domaine défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 4 < x^2 + y^2 < 9 \text{ et } y > 0\}$.

1. Dessiner D, est-il ouvert ? est-il fermé ? est-il dans la tribu borélienne ? que vaut son aire ?
2. En passant aux coordonnées polaires, calculer $\int_D \mathrm{dxdy}$ en justifiant les étapes du calcul et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu.