Théorie de la mesure (L3)

Examen du 16 décembre 2021, durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé
Tous les calculs et toutes les réponses doivent être justifiés
Une rédaction succincte et propre est demandée pour avoir la note maximale

Exercice 1. (4 points) Les propriétés suivantes, sont-elles vraies? Les réponses doivent être justifiées.

(a) La tribu borélienne sur $[0,1]$ contient l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, n \geq 1\right\}$.

(b) Pour toute mesure μ sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la tribu borélienne, on a $\mu([0,1]) < \infty$.

(c) Toute fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut être représentée sous la forme $f = f^+ - f^-$, où $f^\pm$ sont des fonctions boréliennes telles que $f^\pm(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) Pour la droite réelle $E = \mathbb{R}$ munie de sa tribu borélienne, la masse de Dirac concentrée au point $x = 0$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 2. (5 points) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

(a) Montrer que, pour toute fonction mesurable $f : E \to [0, +\infty[$ et tout $C > 0$, on a

$$\mu\big(\{x \in E : f(x) \geq C\}\big) \leq C^{-1} \int_E f \, d\mu.$$

(b) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ mesurables strictement positives. En supposant que $\mu(E) < \infty$, trouver le minimum de la fonction $H : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(f) = \int_E f d\mu \cdot \int_E \tfrac{1}{f} \, d\mu.$$

Indication: on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Exercice 3. (1 point) Énoncer le *théorème de convergence monotone* pour des suites de fonctions.

Exercice 4. (5 points)

(a) Soit $f_n(x) = \dfrac{1 - \cos(nx)}{\sqrt{n}\, x^{3/2}}$. Pour tout $x > 0$, calculer la limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$. Montrer que les fonctions f_n appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$.

(c) Montrer que la limite suivante existe et est un réel strictement positif :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\, d\lambda.$$

(d) Montrer qu'il n'existe pas de $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$.

Exercice 5. (3 points) Soit $E = [-1, 1]$, $\nu = \delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1$, où δ_a désigne la masse de Dirac au point $a \in X$, et μ une mesure absolument continue par rapport à ν avec la densité $f(x) = x^4 + 1$. Calculer l'intégrale

$$\int_E \frac{x}{x+2} d\mu.$$

Exercice 6. (3 points) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit la mesure $\mu = \delta_0 + 2\delta_1$ considérée sur l'intervalle $[0, 1]$ muni de sa tribu borélienne. On considère l'espace $E = \mathbb{R} \times [0, 1]$ avec la tribu produit et la mesure $\nu = \lambda \otimes \mu$. Soit la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y + 1}.$$

Calculer l'intégrale

$$\int_E f(x, y) d\nu(x, y).$$

Indication: on pourra utiliser le théorème de Fubini.

Exercice 7. (4 points)

(a) Donner les définitions d'une tribu et d'une classe monotone.

(b) Énoncer le lemme des classes monotones.

(c) Soient μ et ν deux mesures finies sur l'intervalle $[0, 1]$ muni de sa tribu borélienne telles que pour tous réels $a \leq b$

$$\mu([a, b]) = \nu([a, b]).$$

Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 1. **(a)** Oui (1); **(b)** Non (1); **(c)** Oui (1); **(d)** Non (1). □

Exercice 2. **(a)** Comme f est positive, on a

$$\int_E f \mathrm{d}\mu \geq \int_{\Gamma_C} f \mathrm{d}\mu,$$

où $\Gamma_C = \{f \geq C\}$. (1) Par la monotonie de l'intégrale, on obtient

$$\int_{\Gamma_C} f \mathrm{d}\mu \geq C\mu(\Gamma_C),$$

d'où le résultat. (1)

(b) Pour $g = \mathbf{1}$, on a $H(g) = \mu(E)^2$ (1). D'autre part, l'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée aux fonctions $f^{1/2}$ et $f^{-1/2}$ implique que

$$\mu(E) = \int_E f^{1/2} f^{-1/2} \,\mathrm{d}\mu \leq H(f)^{1/2},$$

d'où on conclut que $H(f) \geq \mu(E)^2$ pour tout $f \in \mathcal{S}$. (2) □

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_E \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu. \quad (1)$$

□

Exercice 4. **(a)** Pour tout $x > 0$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. (1)

(b) En utilisant l'égalité des intégrales de Lebesgue et de Riemann pour des fonctions continues positives et en faisant le changement de variable $y = nx$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f_n(x)| \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|1 - \cos y|}{y^{3/2}} \,\mathrm{d}y. \quad (1) \tag{1}$$

L'intégrale obtenue est finie. (1)

(c) Comme l'intégrante dans le membre de droite de (1) est positive et ne s'annule pas identiquement, on conclut que l'intégrale est strictement positive. (1)

(d) Si une telle majorante existait, on aurait pu appliquer le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée et conclure que la limite du point (c) est égale à zéro. (1) □

Exercice 5. Par la définition de la densité, on a

$$I = \int_E \frac{x}{x+2} d\mu = \int_E \frac{x}{x+2}(x^4+1) d\nu. \quad (1)$$

Comme $\int f \mathrm{d}\delta_a = f(a)$ (1), on conclut que $I = -\frac{4}{3}$ (1). $\square$

Exercice 6. D'après le théorème de Fubini pour des fonctions positives, on a

$$\int_E f(x,y) d\nu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[0,1]} \frac{y}{x^2+y+1} \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}x = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}. \quad (2)$$

L'intégrale obtenue est égale à $\pi\sqrt{2}$. (1) $\square$

Exercice 7. **(a)** (1) Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$ deux familles de parties de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *tribu* si elle vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\varnothing, E \in \mathcal{F}$;

(ii) si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$;

(iii) si $A_n \in \mathcal{F}$ pour $n \geq 1$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

On dit que $\mathcal{M}$ est une *classe monotone* si elle vérifie les propriétés suivantes:

(i') $\varnothing, E \in \mathcal{M}$;

(ii') si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$;

(iii') si $A_n \in \mathcal{F}$ et $A_n \subset A_{n+1}$ pour $n \geq 1$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$.

(b) (1) Soit E un ensemble et $\mathscr{C}$ une famille de parties de E telle que

$$\forall A, B \in \mathscr{C} \quad A \cap B \in \mathscr{C}.$$

Alors la classe monotone minimale contenant $\mathscr{C}$ est une tribu.

(c) (2) Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On définit

$$\mathscr{C} := \{[a,b] \subset \mathbb{R} \,|\, a \leq b\}, \quad \mathcal{M} := \{\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,|\, \mu(\Gamma) = \nu(\Gamma)\}.$$

Alors $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant $\mathscr{C}$. Comme l'intersection de deux intervalles fermés est un intervalle fermé, d'après le lemme des classe monotones, la classe monotone engendrée par $\mathscr{C}$ est une tribu. Elle est donc égale à la tribu borélienne. D'autre part, elle doit être inclue dans $\mathcal{M}$, d'où on conclut que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Cette dernière égalité implique que les mesures μ et ν sont égales. $\square$