Théorie de la mesure (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 16 décembre 2020, durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé
Tous les calculs et toutes les réponses doivent être justifiés
Une rédaction succincte et propre est demandée pour avoir la note maximale

Exercice 1. (4 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = 5 \cdot \mathbf{1}_{[-1,2[}(x) - 2 \cdot \mathbf{1}_{[1,4[}(x),$$

où $\mathbf{1}_A(x)$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

(a) La fonction f, est-elle étagée ?

(b) Trouver une représentation de f sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{1}_{A_j}(x), \tag{1}$$

où A_j sont des ensembles disjoints et a_j sont des réels différents.

(c) Décrire explicitement l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 4\}$.

Exercice 2. (3 points) On définit un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ par

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \quad A_n = \left[n - 2^{n+1}, n + 3^{-n-1}\right].$$

(a) Montrer que A est borélien.

(b) Trouver la mesure de Lebesgue de A. *Indication: comparer A_0 et A_n.*

Exercice 3. (1 point) Énoncer le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée pour les suites de fonctions.

Exercice 4. (3 points) Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) = 1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{L}^2(E, \mu)$.

(a) Montrer que

$$\left(\int_E f \mathrm{d}\mu \right)^2 \leq \int_E f^2 \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Indication: on pourra utiliser une inégalité de Hölder.

(b) Simplifier l'expression
$$\int_E \big(f - \langle f\rangle_\mu\big)^2 \mathrm{d}\mu,$$
où $\langle f\rangle_\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$, et montrer que l'on a une égalité dans (2) si et seulement si f est constante μ-presque partout.

Exercice 5. (2 points) Soit $E = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_N \in E$. On définit la fonction mesurable f sur E par
$$f(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}_x} n, \tag{3}$$
où $\mathcal{N}_x = \{n \in [\![1, N]\!] : a_n > x\}$ (si $\mathcal{N}_x$ est vide, alors $f(x) = 0$). Calculer l'intégrale de f sur E par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 6. (3 points) Soit $E = [0,1]$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ et δ_b la masse de Dirac au point $b \in E$. Trouver toutes les mesures sur $(E, \mathcal{B}(E))$ qui sont absolument continues par rapport à la mesure $\nu = \delta_0 + \delta_1$ et trouver les densités correspondantes.

Exercice 7. (6 points) Soit $\Pi = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\mathscr{L}_2$. On définit une fonction mesurable $f : \Pi \to \mathbb{R}$ par les formules $f(0,0) = 0$ et
$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Énoncer le théorème de Fubini pour des fonctions intégrables $g : \Pi \to \mathbb{R}$.

(b) Calculer les intégrales
$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \quad \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

(c) Le théorème de Fubini, est-il applicable à la fonction f ?

Indication: étudier l'intégrabilité de la fonction f.

Corrigé de l'examen pour le cours *Théorie de la mesure*

Exercice 1. Le fonction f est une combinaison linéaire des fonctions indicatrices des intervalles, elle est donc étagée (1 point). La définition de f implique que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -1 \text{ et } x \geq 4, \\ 5 & \text{pour } -1 \leq x < 1, \\ 3 & \text{pour } 1 \leq x < 2, \\ -2 & \text{pour } 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

On a donc la représentation (1) avec $n = 3$ (2 points). Il s'ensuit que

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) < 4\} =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\,. \quad (1 \text{ point})$$

□

Exercice 2. **(a)** L'ensemble A est borélien, car il est intersection dénombrable des intervalles fermés (1 point).

(b) Pour trouver la mesure de Lebesgue $\mathscr{L}(A)$ de A, on remarque que les intervalles forment une suite croissante, d'où il s'ensuit que $A = [-2, \frac{1}{3}]$. On a donc $\mathscr{L}(A) = \frac{7}{3}$. (2 points) □

Exercice 3. (1 point) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, μ une mesure sur E et $(f_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions telle que

$$f_k(x) \to f(x) \quad \text{quand } k \to \infty, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in E,$$
$$|f_k(x)| \leq f(x) \quad \text{pour tout } k \geq 1 \text{ et } \mu\text{-presque tout } x \in E.$$

Alors

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_E \Big(\lim_{k\to\infty} f_k(x) \Big) \mathrm{d}\mu(x). \tag{4}$$

□

Exercice 4. **(a)** (1 point) Il suffit d'applique l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.

(b) Un calcul simple montre que

$$\int_E \big(f - \langle f \rangle_\mu\big)^2 \mathrm{d}\mu = \langle f^2 \rangle_\mu - \langle f \rangle_\mu^2, \quad (1 \text{ point})$$

d'où on conclut que l'on a une égalité dans (2) si et seulement si $f = \langle f \rangle_\mu$ μ-presque partout (1 point). □

Exercice 5. La fonction f peut être écrit sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} n \, \mathbf{1}_{[0, a_n[}(x). \quad (1 \text{ point})$$

Il s'ensuit que

$$\int_E f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} n \int_E \mathbf{1}_{[0,a_n[}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} n a_n. \quad (1 \text{ point})$$

□

Exercice 6. Une mesure μ est absolument continu par rapport à ν si et seulement si elle s'écrit sous la forme $\mu = a_0\delta_0 + a_1\delta_1$, où $a_0, a_1 \geq 0$ sont quelconques (1 point + 1 point pour la justification). La densité est donnée par la fonction $\rho(x) = a_0\mathbf{1}_0(x) + a_1\mathbf{1}_1(x)$, où $\mathbf{1}_r$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\{r\} \subset E$ (1 point). □

Exercice 7. **(a)** (2 points) Soit $f : \Pi \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathscr{L}_2$. Alors la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable pour $\mathscr{L}_1$-presque tout $y \in [-1,1]$, la fonction $y \mapsto \int_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}x$ est intégrable, et

$$\iint_\Pi f(x,y)\mathrm{d}\mathscr{L}_2(x,y) = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

(b) (2 points) Comme les fonctions $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont impaires, on a

$$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 0.$$

(c) (2 points) En utilisant le théorème de Fubini pour des fonctions positives et le fait que les intégrales de Lebesgue et de Riemann sont égales pour des fonctions continues, pour tout $\delta \in (0,1)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_\Pi |f|\,\mathrm{d}\mathscr{L}_2 &\geq \int_{x^2+y^2\geq\delta^2} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\delta^1\int_0^{\pi/2} \frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r^4} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_\delta^1 r^{-1}\mathrm{d}r \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\ln\delta^{-1}.\end{aligned}$$

Comme $\ln\delta \to -\infty$ quand $\delta \to 0^+$, on conclut que f n'est pas intégrable et donc le théorème de Fubini ne s'applique pas. □