Théorie de la mesure (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 16 décembre 2019, durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé
Tous les calculs et toutes les réponses doivent être justifiés
Une rédaction succincte et propre est demandée pour avoir la note maximale

Exercice 1. (2 points) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ 2 & \text{pour } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

La fonction f, est-elle étagée ?

Exercice 2. (2 points) On définit un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ par

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \big[n - 3^{-n}, n + 2^{-n}\big].$$

Montrer que A est borélien et trouver sa mesure de Lebesgue.

Exercice 3. (1 point) Énoncer le théorème de Levi sur la convergence monotone.

Exercice 4. (2 points) Soit $f_n(x) = ne^{-nx}$ pour $x \geq 1$ et $n \geq 1$. On définit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \geq 1.$$

Calculer l'intégrale suivante dans laquelle $\mathscr{L}_1$ désigne la mesure de Lebesgue:

$$\int_{[1,\infty[} f \mathrm{d}\mathscr{L}_1.$$

Exercice 5. (5 points) Soit $E = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\mu_\alpha : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}_+$ par

$$\mu_\alpha(\Gamma) := \int_E I_\Gamma(x)\, x^\alpha \, \mathrm{d}x,$$

où I_Γ désigne la fonction indicatrice de Γ.

(a) Montrer que μ_α est une mesure sur E et trouver toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles μ_α est une mesure finie.

(b) Montrer que μ_α est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et trouver la densité de Radon–Nikodym $\rho_\alpha = \frac{\mathrm{d}\mu_\alpha}{\mathrm{d}x}$.

(c) Étant donné $p \in [1, +\infty[$, trouver toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\rho_\alpha \in L^p(E)$.

Exercice 6. (4 points) Soit $\Pi = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\mathscr{L}_2$.

(a) Énoncer le théorème de Fubini pour une fonction borélienne $f : \Pi \to \mathbb{R}$.

(b) Le théorème de Fubini, est-il applicable à la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x+y)}{|xy|} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0\,? \end{cases}$$

Indication: montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\cos(x+y) \geq 1/2 \quad \text{pour } 0 \leq x, y \leq \delta,$$

et utiliser cette inégalité pour minorer $|f(x,y)|$.

Exercice 7. (4 points)

(a) Donner les définitions d'une tribu et d'une classe monotone.

(b) Énoncer le lemme des classes monotones.

(c) Soient μ et ν deux mesures finies sur la tribu borélienne la droite réelle $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels $a \leq b$

$$\mu([a,b]) = \nu([a,b]).$$

Montrer que $\mu = \nu$.

Corrigé de l'examen pour le cours *Théorie de la mesure*

Exercice 1. La fonction f est étagée (1 point). En effet, il est facile de vérifier que

$$f(x) = 2 \cdot \mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x).$$

Comme les ensembles $]0, 1[$ et $[1, +\infty[$ sont boréliens, on conclut que f est une fonction étagée (1 point). □

Exercice 2. L'ensemble A est borélien, car il est réunion dénombrable des intervalles fermés (1 point). Pour trouver sa mesure de Lebesgue $\mathscr{L}(A)$, on représente A comme réunion d'intervalles disjoints:

$$A = \big[-1, \tfrac{3}{2}\big] \bigcup \bigg(\bigcup_{n=2}^{\infty} \big[n - 3^{-n}, n + 2^{-n}\big]\bigg).$$

On a donc

$$\mathscr{L}(A) = \frac{5}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\big(3^{-n} + 2^{-n}\big) = \frac{19}{6}. \quad \text{(1 point)}$$

□

Exercice 3. (1 point) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, μ une mesure sur E et $(g_k)_{k\geq 1}$ une suite de fonctions intégrables telle que $0 \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x)$ pour tout $k \geq 1$ et μ-presque tout $x \in E$. Alors

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k \mathrm{d}\mu = \int_E \Big(\lim_{k\to\infty} g_k\Big)\mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

□

Exercice 4. Les sommes partielles

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad k \geq 1,$$

forment une suite croissante de fonctions intégrables positives. D'après le théorème de convergence monotone, on a la relation (1):

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[1,\infty[} \bigg(\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\bigg) \mathrm{d}\mathscr{L}_1(x) = \int_{[1,\infty[} f(x)\, \mathrm{d}\mathscr{L}_1(x). \quad \text{(1 point)}$$

D'autre part, comme les intégrales de Lebesgue et de Riemann sont égales pour des fonctions continues, le membre de gauche est égal à

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{[1,\infty[} ne^{-nx} \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} e^{-n} = \frac{1}{e-1},$$

d'où on conclut que $\int_{[1,\infty[} f \mathrm{d}\mathscr{L}_1 = \frac{1}{e-1}$ (1 point). □

Exercice 5. **(a)** Il est évident que $\mu_\alpha(\varnothing) = 0$ (0.5 point). Montrons que μ est σ-additive. Soit $\{\Gamma_n\}$ une suite d'ensembles boréliens de $\mathbb{R}$ qui sont deux à deux disjoints, et soit Γ leur réunion. Alors, d'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\mu_\alpha(\Gamma) = \int_E x^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} I_{\Gamma_n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E x^\alpha I_{\Gamma_n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\alpha(\Gamma_n) \quad (1 \text{ point}).$$

Trouvons la masse totale de μ_α. Comme les intégrales de Lebesgue et de Riemann sont égales pour des fonctions continues, on a

$$\mu_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{[\varepsilon,1]} x^\alpha \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} & \text{si } \alpha > -1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

On voit que μ_α est finie si et seulement si $\alpha > -1$ (1 point).

(b) Si $\mathscr{L}(\Gamma) = 0$, alors

$$\int_{[n^{-1},1]} I_\Gamma(x) x^\alpha \mathrm{d}x = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

d'où par passage à la limite quand $n \to \infty$ on voit que $\mu_\alpha(\Gamma) = 0$ (1 point).

Par définition de la densité, on a

$$\rho_\alpha(x) = \frac{\mathrm{d}\mu_\alpha}{\mathrm{d}x}(x) = x^\alpha. \quad (0.5 \text{ point})$$

(c) On a

$$\int_E \rho_\alpha^p(x)\mathrm{d}x = \int_E x^{\alpha p}\mathrm{d}x < \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha > -1/p. \quad (1 \text{ point})$$

□

Exercice 6. **(a)** La fonction f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathscr{L}_2$ si et seulement si

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} |f(x,y)| \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y < \infty.$$

Dans ce cas, on a

$$\int_\Pi f(x,y)\,\mathrm{d}\mathscr{L}_2(x,y) = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \quad (2 \text{ points})$$

(b) En utilisant le théorème de Fubini pour des fonctions positives et le fait que les intégrales de Lebesgue et de Riemann sont égales pour des fonctions continues, pour $\delta > \varepsilon > 0$ suffisamment petit on peut écrire

$$\int_\Pi |f|\,\mathrm{d}\mathscr{L}_2 \geq \int_{[\varepsilon,\delta]^2} \frac{|\cos(x+y)|}{|xy|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \frac{1}{2} \int_\varepsilon^\delta \int_\varepsilon^\delta \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(\ln\delta - \ln\varepsilon)^2.$$

Comme $\ln\varepsilon \to -\infty$ quand $\varepsilon \to 0^+$, on conclut que f n'est pas intégrable et donc le théorème de Fubini ne s'applique pas (2 points). □

Exercice 7. **(a)** (1 point) Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$ deux familles de parties de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *tribu* si elle vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\varnothing, E \in \mathcal{F}$;

(ii) si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$;

(iii) si $A_n \in \mathcal{F}$ pour $n \geq 1$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

On dit que $\mathcal{M}$ est une *classe monotone* si elle vérifie les propriétés suivantes:

(i') $\varnothing, E \in \mathcal{M}$;

(ii') si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$;

(iii') si $A_n \in \mathcal{F}$ et $A_n \subset A_{n+1}$ pour $n \geq 1$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$.

(b) (1 point) Soit E un ensemble et $\mathscr{C}$ une famille de parties de E telle que

$$\forall A, B \in \mathscr{C} \quad A \cap B \in \mathscr{C}.$$

Alors la classe monotone minimale contenant $\mathscr{C}$ est une tribu.

(c) (2 points) Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On définit

$$\mathscr{C} := \{[a, b] \subset \mathbb{R} \,|\, a \leq b\}, \quad \mathcal{M} := \{\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,|\, \mu(\Gamma) = \nu(\Gamma)\}.$$

Alors $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant $\mathscr{C}$. Comme l'intersection de deux intervalles fermés est un intervalle fermé, d'après le lemme des classe monotones, la classe monotone engendrée par $\mathscr{C}$ est une tribu. Elle est donc égale à la tribu borélienne. D'autre part, elle doit être inclue dans $\mathcal{M}$, d'où on conclut que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Cette dernière égalité implique que les mesures μ et ν sont égales. $\square$