Université de Cergy-Pontoise Vendredi 21 Décembre 2018
L3 - Mathématiques

Examen de "Théorie de la mesure et de l'intégration"

– durée 3 heures. Documents, calculatrices, et téléphones strictement interdits –

Questions de cours.

1. Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et A une partie de Ω. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est $\mathcal{T} - \mathcal{B}$ mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{T}$.
2. On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

   a) Montrer en utilisant la définition d'une mesure que : pour toute suite croissante $(B_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a $\mu\big(\cup_{n=0}^{+\infty} B_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$.

   b) Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Rappeler la définition de $A = \limsup_{n\to+\infty} A_n$. et montrer que $A \in \mathcal{T}$.
3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ vers l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \Omega;\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geq 1\}$ appartient à $\mathcal{T}$.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction borelienne positive. On considère
$$I = \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)dudv, \qquad J = \int_{\mathbb{R}^2} f(3x, x-2y)dxdy.$$
   Exprimer I en fonction de J en justifiant votre raisonnement.

Exercice 1. (Questions indépendantes)

1. Soit $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\frac{1}{\sqrt{x}}$. Calculer $\| f \|_p$ pour $1 \leq p < 2$, où $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

2. Justifier les affirmations suivantes (sans tenter d'évaluer les intégrales) :

   a)
$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 nx}{1+nx^2}\right)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 nx}{1+nx^2}\right)dx$$
   b)
$$\int_0^{\pi} x(\sin x)^{\frac{2}{3}}dx \leq \left(\int_0^{\pi} x^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_0^{\pi}\sin x\, dx\right)^{\frac{2}{3}}$$
3. Après avoir rappelé le théorème de convergence monotone, considérer la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\mathbb{1}_{[0,1-\frac{1}{n}]}(x)$ pour $x \in [0,1]$. Montrer l'existence et calculer la limite :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{x^k}{k!}dx, \text{ pour tout } x \in [0,1].$$
4. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < y\}$. Calculer en justifiant les étapes du calcul :
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha x}e^{-\beta y}\,\mathbb{1}_D(x,y)dxdy.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{-t^2x^2}}{1+x^2}.$$

Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dx$ et $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec $G(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-u^2}du$.

On rappelle que $\lim_{t\to+\infty} G(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, la fonction $f(t,.)$ est borélienne.
   b) Montrer que la fonction F est bien définie et que $F(0) = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que pour tout $t > 0,\ F'(t) - 2tF(t) = -\sqrt{\pi}$.
5. En déduire que pour tout $t > 0$, on a

$$F(t) = \sqrt{\pi}e^{t^2}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - G(t)\Big).$$

Exercice 3.

Soit μ une mesure sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^+$, et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne.

1. Soit $F : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par $F(t,x) = \mathbb{1}_{\{f\geq t\}}(x)$.
   Montrer que F est mesurable (indication : on pourra remarquer que F est la fonction indicatrice d'un ensemble $A \subset (\mathbb{R}_+)^2$).
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1, bijective et croissante avec $\varphi(0) = 0$. En utilisant 1., montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^+} (\varphi \circ f)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f \geq t\}).\varphi'(t)dt.$$
3. On suppose maintenant que f est dérivable et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f'(x)| \leq c$. On suppose que la mesure μ est la mesure de densité h par rapport à la mesure de Lebesgue, où $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est la fonction mesurable donnée par $h(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^3}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$. Montrer que la fonction $\ln(1+f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à μ.