Université de Cergy-Pontoise | Vendredi 16 Décembre 2017
L3 - Mathématiques | S. Alili

Examen de "Théorie de la mesure et de l'intégration"

– durée 3 heures. Documents, calculatrices, et téléphones strictement interdits –

Questions de cours. On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

a) Montrer en utilisant la définition d'une mesure que : pour toute suite croissante $(B_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a $\mu\big(\cup_{n=0}^{+\infty} B_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$.

b) Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Rappeler la définition de $A = \limsup_{n\to+\infty} A_n$. et montrer que $A \in \mathcal{T}$.

c) Donner la définition d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ étagée positive définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et de $\int_\Omega f d\mu$.

d) Pour une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$, rappeler la méthode de construction de $\int_\Omega f d\mu$.

e) Soit $a > 0$. On suppose que $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et ν l'application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par :

$$\nu(A) = \begin{cases} \sum_{k\in A} a^k & \text{si } A \text{ est de cardinal fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que ν est additive. Calculer $\nu(\mathbb{N})$ et $\nu(\{0, \dots n\})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et déduire la condition necessaire et suffisante pour que ν soit une mesure.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^n \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n e^{-2x} dx., \qquad J_n = \int_0^n \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n e^{-\frac{1}{2}x} dx.$$

1. Montrer que pour tout réel x, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n 1_{[0,n]}(x) = e^x 1_{[0,+\infty[}(x).$$
2. On rappelle que pour tout $u \geq 0$, on a $\ln(1+u) \leq u$. Calculer la limite de I_n en justifiant soigneusement le résultat.
3. A l'aide du lemme de Fatou, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} J_n = +\infty.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borelienne et on suppose que f est bornée. Dans la suite λ désignera la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+tx^2}$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$.
On pose alors pour tout $t > 0$,
$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+tx^2} d\lambda(x)$$
2. Montrer que la fonction F est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ fixé, puis en déduire qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction F est dérivable sur sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ fixé, puis en déduire qu'elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de $F'(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 3. On considère une fonction f dans $L^5([0,+\infty[)$, l'espace des fonctions définies sur $[0,+\infty[$, boreliennes de puissance cinquième intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Calculer l'exposant conjugué du réel positif $p = 5$, puis en utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$|F(x)| \leq Cx^{\frac{4}{5}}.$$
2. Montrer en le justifiant soigneusement que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{+\infty} |f(t)|^5 dt = 0.$$
3. En utilisant de nouveau l'inégalité de Hölder, Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geq n$, on a
$$|F(x) - F(n)| \leq x^{\frac{4}{5}} \left[\int_n^{+\infty} |f(t)|^5 dt\right]^{\frac{1}{5}}.$$
4. ** Déduire des questions 2. et 3. que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^{\frac{4}{5}}} = 0.$$

Exercice 4. On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

1. Dessiner T, que vaut $\lambda_2(T)$?
2. On pose
$$f(x,y) = (y - xy)1_T(x,y).$$
Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \lambda_2)$ et calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2$.
3. Rappeler la definition de $\| f \|_{L^1}$ et de $\| f \|_{L^2}$ puis, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que
$$\| f \|_{L^2} \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$