Université de Cergy-Pontoise Vendredi 21 Décembre 2018
L3 - Mathématiques

Examen de "Théorie de la mesure et de l'intégration"
– durée 3 heures. Documents, calculatrices, et téléphones strictement interdits –

Questions de cours.

1. Soit A la réunion des ensembles $\mathbb{Z}$, $]2,5], \{2\mathrm{e}\}, [10,4\mathrm{e}], \mathbb{Q}$ et $\{11\}$. L'ensemble A est-il un borélien de $\mathbb{R}$? On rappelle que e $\sim 2,71828183\ldots$ est un nombre irrationnel.
2. Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Que signifie "f est une densité de la mesure μ par rapport à la mesure ν" ? Montrer alors que pour toute application mesurable telle que hf est ν-intégrable, on a
$$\int_\Omega h d\mu = \int_\Omega hf d\nu.$$

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ mesure **finie**. On considère une fonction mesurable $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{T}, \ \int_A f d\mu \leq C\mu(A) \quad (*)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \{x \in \Omega \,/\, f(x) \geq C + \frac{1}{n}\}$.

1. Montrer que $A_n \in \mathcal{T}$ et que $A_n \subset A_{n+1}$.
2. a) Montrer que $\displaystyle\int_{A_n} f d\mu \geq \big(C + \frac{1}{n}\big)\mu(A_n)$.
   b) En utilisant la propriété $(*)$, en déduire que $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. a) Montrer que $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \{x \in \Omega \,/\, f(x) > C\}$.
   b) En déduire que $f \leq C$ μ p.p.

Exercice 2. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Rappeler le théorème de convergence dominée. Calculer $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x} dx$.
2. Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < y\}$. Soient α et β deux réels strictement positifs. Calculer
$$\int_\Delta \mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\beta y} d\lambda \otimes \lambda(x,y).$$
3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $p > 1$ et $r \in]1,p[$. Montrer que si f et g sont deux fonctions mesurables et positives sur Ω, alors
$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_{\frac{p}{r}} \cdot \| g \|_{\frac{p}{p-r}} \ \text{ et } \ \| fg \|_{\frac{p}{r}} \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_{\frac{p}{r-1}} \ .$$

Problème. Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}, \lambda)$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}_+$ et λ la mesure de Lebesgue. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de L^1. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$L^f(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-tx} f(x) d\lambda(x).$$

1. a) Vérifier que la fonction $t \to L^f(t)$ est bien définie en tout point de $\mathbb{R}_+$ et que

$$L^f(0) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) d\lambda(x).$$

   b) Montrer que L^f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   c) Montrer que $\lim_{t\to+\infty} L^f(t) = 0$.
   (Indication : on pourra considérer une suite (t_n) de réels positifs tendant vers $+\infty$.)
2. Dans cette question, on suppose que $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ g(x) = xf(x)$ est une fonction de L^1.
   a) Montrer que L^f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée continue donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ (L^f)'(t) = -L^g(t).$$

   b) En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty L^g(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)d\lambda(x)$.
   c) Montrer que si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{x} d\lambda(x) < +\infty$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} L^f(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(x)}{x} d\lambda(x))$.
   (**Indication :** appliquer c) avec la fonction $\frac{f(x)}{x}$ dans le rôle de f)
3. Dans cette question, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\sin(x)$.
   a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ L^{f_n}(t) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-nt}(\cos(n) + t\sin(n))}{1+t^2}.$$

   (**Indication :** remarquer que $L^{f_n}(t)$ est la partie imaginaire de $\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{x(i-t)}dx$)
   b) On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\mathrm{e}^{-nt}\big(\cos(n) + t\sin(n)\big)| \leq \mathrm{e}^{-(n-1)t} \leq 1.$$

   d) Montrer que $\displaystyle\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} L^{f_n}(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.
   e) Montrer en utilisant ce qui précède et le résultat de la question 2c que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$