Calcul Intégral (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 17 décembre 2015, durée : 3 heures [1]

Les notes de cours ne sont pas autorisées
Les téléphones portables doivent être éteints

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–10, donner la réponse (*vrai* ou *faux*) sans aucune justification. Chaque bonne réponse donnera 0,5 point.

1. La tribu borélienne sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ contient tous les ensembles fermés de $\mathbb{R}$ qui sont inclus dans $[a,b]$.

2. Soit μ une mesure sur la tribu borélienne d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Alors $\mu(\varnothing) = 0$.

3. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée est continue.

4. Une fonction étagée sur $[0,1]$ est continue par morceaux.

5. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne intégrable par rapport à une mesure finie μ. Alors
$$\int_{[a,b]} |f(x)| \mu(\mathrm{d}x) < \infty.$$

6. Soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive telle que $\int_X h \mathrm{d}\mu = 0$. Alors h est égale à zéro μ-presque partout.

7. Soit μ une mesure finie sur l'intervalle $[a,b]$, muni de sa tribu borélienne et $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions boréliennes positives telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors
$$\int_{[a,b]} f_n \mathrm{d}\mu \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

8. Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur un ensemble X et μ une mesure $(X, \mathcal{F})$. Pour toutes fonctions $\mathcal{F}$-mesurables $f, g : X \to \mathbb{R}$ on a
$$\int_X |fg| \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X |f|^4 \mathrm{d}\mu \right)^{1/4} \left(\int_X |g|^{4/3} \mathrm{d}\mu \right)^{3/4}.$$

9. La transformée de Fourier d'une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut avoir une discontinuité au point $\xi = 0$.

[1] *La note de l'examen* NE *est calculée par la formule* NE $= \min(N1, 10) + N2$, *où* $N1$ *et* $N2$ *sont les notes pour les parties I et II.*

10. Soient μ_1, μ_2 deux mesures finies sur un espace X muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et $\mu_1 \otimes \mu_2$ leur produit tensoriel. Alors $(\mu_1 \otimes \mu_2)(X \times X) = \mu_1(X)\mu_2(X)$.

Questions de cours. (5 points)

(a) Définir la notion de la limite inférieure d'une suite $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

(b) Énoncer le lemme de Fatou.

(c) Démontrer le lemme de Fatou. *Indication:* on peut utiliser le théorème de convergence monotone.

Questions de TD. (5 points) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Calculer, en le justifiant, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{1+nx}{(1+x)^n} \lambda(\mathrm{d}x).$$

Deuxième partie

Exercice 1. (5 points) Soit μ une mesure finie sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. On définit $F(t) = \mu(]-\infty, t])$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que F est une fonction croissante telle que $0 \le F(t) \le \mu(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que F est continue à droite en tout point $t \in \mathbb{R}$ et que F est continue au point $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{t\}) = 0$.

(c) Montrer que $F(t) \to 0$ quand $t \to -\infty$ et $F(t) \to \mu(\mathbb{R})$ quand $t \to +\infty$.

(d) Montrer que si $\mu([-R, R]) = \mu(\mathbb{R})$ pour un réel $R \ge 0$, alors il existe des points $t_0 \le t_1$ tels que $F(t_0) = 0$ et $F(t_1) = \mu(\mathbb{R})$.

Exercice 2. (5 points) Soit $X = [a, b]$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur X et μ une mesure sur $(X, \mathcal{B})$. Étant donné $A \in \mathcal{B}$, on définit $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$ pour $B \in \mathcal{B}$.

(a) Montrer que μ_A est une mesure absolument continue par rapport à μ.

(b) Trouver la densité $\frac{\mathrm{d}\mu_A}{\mathrm{d}\mu}$.

Soient ν une mesure finie qui n'est pas absolument continue par rapport à μ, et

$$m = \sup\{\nu(E) \mid E \in \mathcal{B}, \mu(E) = 0\}.$$

(c) Montrer que $m > 0$.

(d) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $\nu(A) = m$.

(e) Soit A l'ensemble construit en (d) et $A^c = X \backslash A$. Montrer que $\nu = \nu_A + \nu_{A^c}$ et que ν_{A^c} est absolument continue par rapport à μ.

Corrigé de l'examen pour le cours *Calcul intégral*

Questions. 1. Vrai, 2. Vrai, 3. Faux, 4. Faux, 5. Vrai, 6. Vrai, 7. Faux, 8. Vrai, 9. Faux, 10. Vrai. $\square$

Questions de cours. **(a)** (1)

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{k\geq n} a_k\Big).$$

(b) (1) Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions intégrables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Alors

$$\int_X \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

(c) (3) Sans perte de généralité, on peut supposer que le membre de droite dans l'inégalité (1) (noté A) est fini. On pose $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Alors (g_n) est une suite croissante de fonctions intégrables telle que $\int_X g_n \mathrm{d}\mu \leq A$ pour tout $n \geq 1$. Le théorème de convergence monotone implique que le limite

$$f = \lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

est une fonction intégrable et son intégrale est majoré par A. $\square$

Questions de TD. La suite $f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$ converge simplement vers une fonction f égale à zéro pour tout $x > 0$. En plus, elle est bornée par 1 pour tout $x \geq 0$. Le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée implique que la limite est égale à zéro. $\square$

Exercice 1. **(a)** (1) Si $t_1 \leq t_2$, alors $]-\infty, t_1] \subset]-\infty, t_2]$ et donc $F(t_1) \leq F(t_2)$. Du plus, comme $\varnothing \subset]-\infty, t] \subset \mathbb{R}$, on a $0 \leq F(t) \leq \mu(\mathbb{R})$.

(b) (2) Si $(t_n) \subset \mathbb{R}$ est une suite décroissante qui converge vers t, alors

$$]-\infty, t] = \bigcap_{n\geq 1}]-\infty, t_n].$$

On voit que

$$F(t) = \lim_{s\to t^+} F(s).$$

D'autre part, si $(t_n) \subset \mathbb{R}$ est une suite croissante qui converge vers t, alors

$$]-\infty, t[= \bigcup_{n\geq 1}]-\infty, t_n],$$

d'où on conclut que $F(t_n) \to \mu(]-\infty, t[)$. Cette limite est égale à $F(t)$ si et seulement si $\mu(t) = 0$.

(c) (1) Il suffit de remarquer que

$$\bigcap_{n\geq 1}]-\infty, -n] = \varnothing, \qquad \bigcup_{n\geq 1}]-\infty, n] = \mathbb{R}.$$

(d) (1) On vérifie que $F(R-1) = 0$ et $F(R) = \mu(\mathbb{R})$. $\square$

Exercice 2. **(a)** (0.5) Si $\mu(B) = 0$, alors $\mu_A(B) \leq \mu(B) = 0$.

(b) (1) On vérifie directement que la densité est donnée par la fonction caractéristique $I_A(x)$.

(c) (1) Supposons que $m = 0$. Soit $\Gamma \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(\Gamma) = 0$. Alors, d'après l'hypothèse, on a $\nu(\Gamma) \leq m = 0$, d'où on conclut que $\nu \ll \mu$. La contradiction obtenue montre le résultat cherché.

(d) (1) Soit $(A_n) \subset \mathcal{B}$ une suite telle que $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\mu(A_n) \to m$ quand $n \to \infty$. Alors $A = \cup_n A_n$ vérifie les propriétés cherchées.

(e) (1.5) Pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a

$$\nu(B) = \nu(A \cap B) + \nu(A^c \cap B) = \nu_A(B) + \nu_{A^c}(B).$$

De plus, si $\mu(B) = 0$, alors $\nu(B) = \nu(A \cap B)$ (et donc $\nu_{A^c}(B) = 0$). En effet, dans le contraire, on a

$$\nu\big(A \cup (A^c \cap B)\big) = \nu(A) + \nu(A^c \cap B) > m, \quad \mu\big(A \cup (A^c \cap B)\big) = 0,$$

et on obtient une contradiction avec la définition de m. $\square$