L3, Décembre 2021
NUMÉRO COPIE :

Structures algébriques

TÉLÉPHONE ET OBJETS CONNECTÉS ÉTEINTS, SUR LA TABLE ET À L'ENVERS

DOCUMENTS INTERDITS. Tout résultat NON JUSTIFIÉ est considéré comme FAUX

Exercice 1.

(1) Démontrer que les groupes A_4 et D_6 ne peuvent pas être isomorphes.

(2) Soit $p \neq 2$ un nombre premier. Démontrer que si G est un groupe abélien de cardinal p^2, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

Soit H un groupe quelconque et soient $a, b \in H$.

(1) Démontrer que $< a, b > = < ab, b >$.

(2) À quelle condition nécéssaire et suffisante sur $r \in \mathbb{Z}$, a-t-on $< a > = < a^r >$? Justifier la réponse.

Soit maintenant G le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Démontrer que G est un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$.

(4) Calculer l'ordre de a, b et ab.

(5) Qui est G? Justifier la réponse.

Exercice 3. Soit $\mathbb{D} = \{d \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ et } 10^n d \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Démontrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. On l'appelle l'anneau des nombres décimaux.

(2) Soit

$$d = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \qquad a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, a \wedge b = 1.$$

Démontrer que $d \in \mathbb{D}$ si et seulement si $b = 2^m 5^n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. En déduire que pour tout $d \in \mathbb{D}$ ils existent uniques $m, n, a \in \mathbb{Z}$ avec $a \wedge 2 = 1 = a \wedge 5$ et $d = a 2^m 5^n$.

(3) Calculer $\mathbb{D}^*$, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{D}$.

(4) Soit

$$\phi : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}, \qquad d \mapsto \phi(d) := |a| = \text{ la valeur absolue de } a$$

si $d = a 2^m 5^n$, avec $m, n, a \in \mathbb{Z}$ et $a \wedge 2 = 1 = a \wedge 5$. Démontrer que $(\mathbb{D}, \phi)$ est un anneau euclidien.

(5) $\mathbb{D}$ est-il principal?

(6) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{2, 5\}$ premier on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{D}/p\mathbb{D} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

(7) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ le rationnel

$$\frac{n^2 + 1}{n(n^2 - 1)}$$

n'est jamais un nombre décimal.

ENTOURER LA BONNE RÉPONSE

De (1) à (10) : une bonne réponse entourée = +0,75, une mauvaise = -0,75. (11) : 1 point si une bonne réponse, 0 sinon. La note finale du QCM ne sera pas inférieure à 0.

(1) Un sous-anneau d'un anneau factoriel est factoriel.

VRAI FAUX

(2) Un quotient d'un anneau principal est principal.

VRAI FAUX

(3) Soit G un groupe et soit $H = \{g \in G \mid |g| < \infty\}$. Alors H est un sous-groupe de G.

VRAI FAUX

(4) Soit G un groupe et g, h deux éléments de G avec $|g| = m, |h| = n$, $gh = hg$. Alors

$|gh| \mid m \vee n$ $|gh| = m \vee n$ on ne peut rien dire

(5) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier tel que $p \nmid a$. Alors l'équation $ax \equiv b \pmod{p}$ a

toujours une unique solution mod p une ou plusieurs solutions mod p cela depend de a, b, p

(6) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $m \nmid a$. Alors l'équation $ax \equiv b \pmod{m}$ a

toujours une unique solution mod m une ou plusieurs solutions mod m cela depend de a, b, m

(7) Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier et soit $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

(a) Le nombre d'éléments d'ordre p^2 de G est :

1 p p^2 $\varphi(p^2)$ $\varphi(p^2)p$ $\varphi(p^2)p^2$

(b) Le nombre de sous-groupes cycliques de cardinal p^2 de G est :

1 p p^2 $\varphi(p^2)$ $\varphi(p^2)p$ $\varphi(p^2)p^2$

(8) Soit

$$A = \frac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{2}x + \bar{3})}.$$

Le groupe $(A^*, \cdot)$ est-il cyclique?

OUI NON

(9) Le polynôme $p(x) = 2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$

VRAI FAUX

(10) Le polynôme $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$

VRAI FAUX

(11) Soit $X = \{\sigma(12)(34)\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\} \subset S_n$. Alors le cardinal de X est :