L3, Décembre 2020
NUMÉRO COPIE :

Structures algébriques

Documents interdits et TÉLÉPHONE ÉTEINT SUR LA TABLE ET À L'ENVERS

Exercice 1.

(1) Décrire tous les morphismes de groupes $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

(2) Parmi ces morphismes lesquels sont surjectifs? Justifier la réponse.

(3) Donner la liste de tous les morphismes de groupes $\psi : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ en justifiant pourquoi ils sont bien définis.

Exercice 2.

(1) Soit $(G, \cdot)$ un groupe **fini** et soit H un sous-ensemble non vide qui vérifie:

$$(*) \qquad \forall (h_1, h_2) \in H^2 : \quad h_1 \cdot h_2 \in H.$$

Démontrer que H est un sous-groupe.

(2) Trouver un groupe $(G, \cdot)$ de cardinal infini et un sous-ensemble H qui vérifie $(*)$ mais qui n'est pas un sous-groupe.

(3) Soit

$$T = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} \subset GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

où $GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le groupe (par rapport au produit usuel de matrices) des matrices de taille 3 inversibles à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Démontrer que T est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(4) Soient

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deux éléments de T. Calculer leur ordres.

(5) Démontrer que $\langle a \rangle \lhd T$ et que $T = \langle a, b \rangle$.

(6) Démontrer que $T \simeq D_4$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Démontrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

(2) Démontrer que $M : \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}, \quad z = a + b\sqrt{5} \mapsto a^2 - 5b^2$ est multiplicative.

(3) Démontrer qu'il n'existe pas un élément $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ tel que $M(z) = \pm 2$ (on pourra raisonner modulo 5). En déduire que si $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est tel que $M(z) = \pm 4$ alors z est irréductible.

(4) Démontrer que si $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ est inversible alors $M(z) = \pm 1$.

(5) Démontrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 4.

(1) Décrire les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

(2) Soit $I \neq \{0\}$ un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$. Démontrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/I$ a cardinal fini.

TOURNER SVP

ENTOURER LA BONNE RÉPONSE

Une bonne réponse entourée = +0,5, une mauvaise = -0,5. La note finale du QCM ne sera pas inférieure à 0.

<u>Plusieurs bonnes réponses pour la même question sont possibles.</u>

(1) (a) Tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ a le même corps de fractions.

VRAI FAUX

(b) Tout sous-anneau de $\mathbb{R}$ a le même corps de fractions.

VRAI FAUX

(2) Soit A un anneau intègre.

(a) L'identité de Bezout est valable pour tout couple d'éléments si A est

éuclidien principal factoriel quelconque

(b) La propriété : $\forall (a,b,c) \in A^3,\ (a \mid bc,\ a \wedge b = 1) \Longrightarrow a \mid c$ est valable si A est

éuclidien principal factoriel quelconque

(3) Soit A_3 le sous-anneau de $\mathbb{Z}[x]$ défini par : $A_3 = \{f = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]; 3 \mid a_1\}$.

(a) Le ppcm de 3 et $3x$ dans A_3 est

$3x$ $9x$ $9x^2$ $\nexists$

(b) Le pgcd de 3 et $3x$ dans A_3 est

1 3 $\nexists$

(4) Dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ le pgcd de 4 et $2 + 2i\sqrt{3}$ est

1 2 $1 + i\sqrt{3}$ 4 $2 + 2i\sqrt{3}$ $\nexists$

(5) Dans $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}]$ le pgcd de 4 et $2 + 2i\sqrt{3}$ est

1 2 $1 + i\sqrt{3}$ 4 $2 + 2i\sqrt{3}$ $\nexists$

(6) Soit

$$A = \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x^3 + x + \bar{1})}$$

(a) le cardinal de A^* est

1 2 16 26 aucun de ceux-là

(b) l'ordre de $x + (x^3 + x + \bar{1})$ dans $(A^*, \cdot)$ est

2 4 8 13 16 26 aucun de ceux-là

(c) Le groupe $(A^*, \cdot)$ est-il cyclique?

OUI NON

(7) Pour tout $n \geq 1$ le groupe S_n admet un sous-groupe d'indice n.

VRAI FAUX