Décembre 2019
L3
Mathématiques

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Aucun document autorisé, calculatrice interdite.
UNE REPONSE NON JUSTIFIEE N'EST PAS PRISE EN COMPTE.

Exercice 1 (Questions indépendantes)**.**

a) Soit $f = x^4 - 3x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{C}[x]$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ses racines complexes. Soit $g = x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \in \mathbb{C}[x]$ le polynôme qui a $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \alpha_4^{-1}$ comme racines complexes. Calculer b_1.

b) Soit D_n le groupe diedrale et soit $r = r_{2\pi/n}$ la rotation d'angle $2\pi/n$. Démontrer que tout sous-groupe de $\langle r \rangle$ est distingué dans D_n. Si $n > 2$, exhiber ensuite un sous-groupe de D_n qui n'est pas distingué.

c) Factoriser $x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{2} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ comme produit d'irréductibles de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. Lister les éléments nilpotents ds l'anneau quotient

$$\frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{2})}$$

et expliquer pourquoi il n'y en a pas d'autres.

d) Démontrer que toute permutation impaire a ordre pair.

Exercice 2.

a) Soit G un groupe et soit $\sim$ la relation binaire sur G définie par :

$$\forall (g, g') \in G^2 \qquad g \sim g' \Longleftrightarrow \exists h \in G \text{ et } g' = hgh^{-1}.$$

Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. On appellera classes de conjugaison les classes pour cette relation.

b) Soit $H \trianglelefteq G$ un sous-groupe disitingué. Démontrer que H est une réunion de classes de conjugaison.

c) Démontrer que dans S_4 il y a exactement 5 classes de conjugaison.

d) Trouver tous les sous-groupes distingués de S_4.

e) Pour chaque sous-groupe distingué H trouvé dire (en justifiant la réponse) à quel groupe connu est isomorphe le groupe quotient S_4/H.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Exercice 3.

a) Soit $\alpha = \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a_1 + a_2\alpha \in \mathbb{C} \,|\, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-anneau intègre de $\mathbb{C}$.

b) Démontrer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}[\alpha] \simeq \frac{\mathbb{Z}[x]}{(x^2 - x + 2)}.$$

c) Calculer $Frac(\mathbb{Z}[\alpha])$.

d) Soit $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq},\ z \mapsto z\bar{z}$. Exprimer $N(a_1 + a_2\alpha)$ en fonction de a_1 et a_2.

e) Soit $z = z_1 + z_2\alpha$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$. Démontrer qu'il existe $t \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tel que $N(z - t) < 1$.

f) Démonter que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un anneau euclidien avec la restriction de N à $\mathbb{Z}[\alpha] \setminus \{0\}$ comme stathme.

g) Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[\alpha] \setminus \mathbb{Z}$ on a $N(z) \geq 2$. En déduire l'ensemble $\mathbb{Z}[\alpha]^*$ des inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

h) Donner la définition d'élément irréductible d'un anneau intègre. Démontrer que 2 n'est pas un élément irréductible de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

i) On considère le sous anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] = \{a_1 + a_2 i\sqrt{7} \in \mathbb{C} \,|\, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{Z}[\alpha]$. Démontrer que 2 est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.

j) Démontrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 4 (BONUS)**.** On assume le résultat suivant: un groupe fini dont tous les éléments différents de l'élément neutre ont ordre 2 a comme cardinal une puissance de 2.

Soit G un groupe de cardinal 6 non cyclique. Démontrer que G est isomorphe à S_3.