Décembre 2018
L3
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Aucun document autorisé, calculatrice et téléphone interdits. Barème indicatif.

Soigner la rédaction et la calligraphie, une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Exercice 1 (Questions de cours [6pts]).
a) Soit G un groupe et soient $a, b \in G$ d'ordres respectifs m et n. On suppose que :

$$m \neq 1 \neq n, \qquad m \wedge n = 1, \qquad ab = ba.$$

Démontrer que l'ordre de ab est mn.

b) Soit A un anneau intègre et soit $(a, b) \in A^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Définir le pgcd de a et b. Démontrer ensuite que si A est factoriel alors il existe toujours le pgcd d'un tel couple (a, b).

c) Soit K un corps et soit $\{0\} \neq I$ un idéal de $K[x]$. Démontrer qu'il existe $p(x) \in K[x]$ tel que $I = (p(x))$. Le seul résultat du cours que vous pouvez admettre est l'existence de la division euclidienne dans $K[x]$.

Exercice 2 ([6pts]).
a) Donner la liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ de degré 2, 3 et 5 en justifiant votre réponse.

b) Quel est l'ordre de $(124)(253) \in S_5$? Donner la liste des ordres des éléments de S_7. Justifier la réponse.

c) Calculer l'ordre de $\overline{21}$, élément du groupe $(\mathbb{Z}/1740\mathbb{Z}, +)$. Combien d'éléments du groupe $(\mathbb{Z}/1740\mathbb{Z}, +)$ ont le même ordre que $\overline{21}$? Calculer le nombre de sous-groupes de $(\mathbb{Z}/330\mathbb{Z}, +)$. Justifier toutes les réponses.

Exercice 3 ([3pts]). Soit $n \geq 2$ e soit $D(D_n) = \langle [g, h] = ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in D_n \rangle$ le sous-groupe derivé du groupe diedral $D_n \simeq \langle r, s \mid |r| = n, |s| = 2, srs = r^{-1} \rangle$.

a) Démontrer que $D(D_n) = \langle r^2 \rangle$.

b) En séparant le cas n pair de celui n impair, calculer le cardinal de $\langle r^2 \rangle$.

c) Calculer le groupe quotient $D_n/D(D_n)$. Ceci signifie démontrer à quel groupe connu il est isomorphe.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Exercice 4 ([8pts]). Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{C}$:
$$\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \in \mathbb{C} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

a) Démontrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Est-il intègre?

b) L'élément $1 + j$ est-il inversible dans $\mathbb{Z}[j]$?

c) Soit $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq}$, $N(z) = z\overline{z}$. Démontrer que si $z = a + bj \in \mathbb{Z}[j]$ alors $N(z) \in \mathbb{N}$ et exprimer $N(a + bj)$ en fonction de a et b.

d) Calculer $Frac(\mathbb{Z}[j])$.

e) Démonter que $\mathbb{Z}[j]$, avec la restriction de N à $\mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$ comme stathme, est un anneau euclidien.

f) Calculer l'ensemble $\mathbb{Z}[j]^*$ des inversibles de $\mathbb{Z}[j]$. À quel groupe connu est-il isomorphe $(\mathbb{Z}[j]^*, \cdot)$?

g) Le nombre 7 est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[j]$? Justifier votre réponse.

h) Démontrer que si $z \in \mathbb{Z}[j]$ alors $N(z) \not\equiv 2 \bmod 3$ (on pourra utiliser un tableau). En déduire que si $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier tel que $p \equiv 2 \bmod 3$ alors p est irréductible comme élément de $\mathbb{Z}[j]$.

i) Démontrer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux
$$\mathbb{Z}[j] \simeq \frac{\mathbb{Z}[x]}{(x^2 + x + 1)}.$$